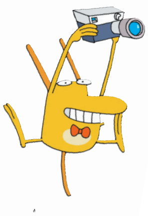


1st part ›››

총론

Ⅰ. 수학 교육의 목적

오늘날의 수학 교육을 지탱하는 사상적 기반은 유클리드(Euclid ; ? B.C. 325～? B.C. 265)의 학문지상주의(acade-micism), 헤론(Heron ; ? 10 ～? 75)의 현실주의(realism), 페스탈로치(Pestalozzi, J. H. ; 1746～1827)의 인본주의(humanism)로 볼 수 있다.

유클리드는 '원론' 13권을 집대성하여 이론 수학을 정립함으로써 지금도 학교 수학에서 그 내용을 다루고 있을 만큼 굳건한 학문의 토대를 마련하였다. 그러나 유클리드가 혼자의 힘으로 이론 수학을 정립한 것은 아니며, 그 이전의 많은 수학자들의 업적을 집대성한 것이다.

수학은 학문으로서의 이론적 토대가 정립되기 이전에 필시 실용적 목적에 의한 탐구가 선행되었던 것임에 분명하다. 이러한 점에서 헤론은 '실용 수학' 의 선구자라고 할 수 있다. 헤론의 실용 수학을 유클리드의 학문과 같은 위치에 서게 한 것은 20세기 초의 수학 교육 개량 운동이었다. 증명뿐만 아니라 실험 · 실측의 도입과 더불어 수학의 실용성을 중시하려고 한 것이다.

이러한 관점에서 독일의 수학 교육 개량 운동가였던 클라인(Klein, C. F. ; 1849～1925)의 협력자 트로이틀라인(Treutlein, P. ; 1845～1912)의 직관 기하의 창설은 큰 공적이며, 오늘날까지 초 · 중등 학교의 도형 단원의 지도에 있어서 큰 영향을 미치고 있다.

한편, 페스탈로치는 수학에 조예가 깊지는 않았지만 인간의 마음 속에서 수학을 본 사람이라고 할 수 있다. 즉, 수학 교육은 아동의 밖에 있는 수학을 아동의 머릿속에 주입하는 것이 아니라, 아동이 본래 가지고 있는 힘에 의해 수학을 만들어 내게 하는 것이 그의 교육 방법의 기본적인 생각이며, 이것이 오늘날의 활동주의적 수학 교육관의 출발점이라고 볼 수 있다.

1. 수학 교육의 목적

수학 교육의 목적은 일반적인 교육 목적의 기본 관점을 중심으로 수학의 실용적 가치의 구현, 문화적 · 교양적 가치의 함양, 도야적 가치의 구현, 창의적 활동의 실천 등의 기본적인 관점을 토대로 언급할 수 있다. 또한, 수학의 특성에서 도출할 수 있는 기초성 · 유용성, 추상성 · 일반성, 기호성 · 형식성, 논리성 · 계통성, 심미성 · 과학성 등을 토대로 구체적인 목표를 설정할 수도 있다. 한편, 문화적 관점에서의 수학 문화의 가치를 이념적 차원에서의 합리성과 객관성, 정서적 차원에서의 통제성과 진보성, 사회학적인 차원에서의 개방성과 신비성 등으로 논할 수도 있다. 그러나 수학 교육은 수학적 사고력과 창의력의 육성을 그 주요한 목적으로 삼는다고 보아도 과언이 아니다.

01 일반적인 교육 목적에 대응하는 수학 교육의 목적

수학의 지도는 교육 활동의 일환으로서 타 교과의 지도에서도 생각할 수 있는 일반적인 교육적 관점이 바탕이 된다. 일반적으로, '교육의 목적' 을 생각할 경우 다음과 같은 관점이 중시되고 있다.

가. 인간이 사회의 한 구성원으로서 생활을 실천하는 데 필요한 능력을 갖도록 젊은 세대를 기르는 일
⬅ 실용적 목적

나. 선조들의 문화 유산은 생활의 실천에서 활용될 뿐만 아니라, 그것 자체가 또한 중요한 가치를 지니는 것이므로 이것들이 다음 세대로 전승되도록 하는 일
⬅ 문화적 · 교양적 목적

다. 인간이 본래 가지고 있는 여러 가지 능력을 끄집어 내어 갈고 닦는 일 ⬅ 도야적 목적

라. 창의적인 실천 활동을 할 수 있고, 거기에서 아름다움과 즐거움을 찾을 수 있도록 하는 일
⬅ 창의적 목적

이와 같은 일반적인 교육의 목적에 대응하여, 수학 교육

에서는 다음과 같이 구체적인 목적을 설정할 수 있다.

(1) 수학의 실용적 가치의 구현

수학 교육에서는 일상생활에 필요한 수학적 지식이나 기능을 습득시키는 것을 목적으로 한다. 고대 수학의 발생 자체가 인류 생활의 필요에서 이룩된 것이므로 실용성을 목적으로 삼는 것은 당연한 것이다. 물론 실용성은 개인의 생활 수준이나 직업 등에 따라 다양한 성격을 지니게 되며 내용도 복잡하게 된다.

또한 일상적으로 필요한 지식, 기능이라도 단순히 형식적인 테두리에서 머물지 않고, 수량적인 사고를 할 수 있는 아이디어나 개념을 잘 쓸 수 있도록 해야 한다.

(2) 문화적 · 교양적 가치의 함양

인류는 역사상 과학, 기술, 문학, 예술 등 많은 문화를 창조하여 왔다. 이들은 모두 빛나는 문화적 가치를 지니고 있으며, 인류는 이의 전승 및 발전에 기여해야 한다.

수학도 독특한 문화적 가치를 지닌 학문이다. 유클리드 기하학은 문화적 가치로 인하여 고대에서 근세에 이르기까지 인류에 의해 전승되어 온 것이다. 여기서 우리들이 유념할 것은 수학은 결코 특수한 사람에게만 필요한 것이 아니고, 수학 교육도 훌륭한 수학자를 양산하는 데 목적이 있는 것이 아니라는 점이다. 수학 교육에서는 수학의 필요성을 알고, 즐겁고 재미있는 학습을 통하여 수학의 문화적 · 교양적 가치를 많은 아동들이 알 수 있도록 하는 것이 중요한 일이다.

(3) 도야적 가치의 구현

수학의 학습에서는 그 학습 과정이나 학습의 결과 어떤 정신적인 습관이 형성된다든가 어떤 성격의 능력이 육성된다든가 하는 직접적인 것은 아니지만, 어느 정도 밀접한 관련을 가진 정신적인 가능성이 기대된다. 즉, 논리적으로 사고하는 능력, 형식화하는 능력 등의 전이를 기대하게 된다. 이와 같은 수학 학습의 결과는 형식으로 정착하고, 이 형식은 다른 학습에 파급되기를 바라고 있다.

(4) 창의적 활동의 실천

인간으로서의 보람과 즐거움은 문화의 수용과 함께 어떤 형태로든 문화 활동에 참가하며, 더욱이 새로운 것을 만들어 내는 능력을 발휘할 수 있다는 것이다. 새로운 수학적 지식을 만들어 낸다는 것은 극히 어려운 일이며 학습도 어떤 표준적인 하나의 흐름에 따라서 진행되는 경우가 많지만, 그러한 경우에서도 아동 개개인의 이해의 방법이나 문제를 음미하는 방법 등은 모두 개성적인 것이다.

실제 학습에서 아동들이 다양한 사고 활동을 하고 있는 모습은, 곧 아동의 상상력이나 유연성의 표출이며 창의적 활동을 실천하는 일로 간주된다. 우리는 과정으로서, 그리고 창의적 활동으로서의 수학 학습을 통하여 아동의 창의력을 고무시키는 방향을 모색하여야 한다. 또한 문제해결의 즐거움과 보람을 가지며, 수학의 힘을 자각할 수 있도록 지도하여야 할 것이다.

02 수학의 특성에서 도출되는 수학 교육의 목표

수학은 가장 순수하고 엄밀한 지적 활동으로 과학의 여왕이라고들 한다. 그러나 평범한 사람들에게는 수학이 개인적인 게임이거나 불확실하고 가치 없는 기호들의 조작 정도로 보일 수 있다. 1989년 루카스(Lucas, J. F.)는 수학에 대한 보통의 이야기들을 다음과 같이 다섯 가지로 열거하고 있다.

가. 수학은 기억해야 할 고립된 사실들과 기법들의 모임이다.

나. 수학적 진리는 절대적이다.

다. 수학은 정확한 과학이다.

라. 수학은 주로 기호적 표상과 조직을 취급하므로, 보통의 쓰기와 말하기 기능들은 수학의 의사소통에 필요하지 않다.

마. 수학은 누군가가 외롭게 수행하는 것이다.

수학이 무엇인가에 대한 이와 같은 고정 관념을 없애려면 수학을 가르치는 방법을 바꾸어야 한다. 우리는 수학을 우리 문화의 통합적인 부분이자 중요한 원동력으로 보고 이를 학생들에게 가르쳐야 한다. 1993년 네스(Ness, H.)는 수학을 다음과 같이 기술하고 있다.

"인간 세상의 질서를 추구하려는 인간의 원초적 충동으로 탄생되었으므로, 수학은 구조와 패턴의 연구를 위하여 영원히 발전하는 언어이다. 물리적 실체에 근거를 두고 거듭 새로워지므로, 수학은 지적 호기심에서 발원하여 예기치 않은 아름답고도 유용한 연결성과 패턴들이 출현하는 추상화와 일반화의 수준으로 발전한다. 수학은 추상적 사고뿐만 아니라 자연 법칙의 보금자리이다. 수학은 순수한 논리이자 창의적인 예술이다."

이러한 수학의 특성은 기초성 · 유용성, 추상성 · 일반성, 기호성 · 형식성, 논리성 · 계통성, 심미성 · 과학성 등으로 요약할 수 있으며, 이들 특성으로부터 다음과 같은 수학 교육의 목표를 도출할 수 있다.

(1) 기초성 · 유용성에서 도출되는 목표

수학은 일상생활을 비롯하여 다른 여러 교과의 기초적 역할을 담당하게 되므로 그 유용성이 매우 높다. 여기서 말하는 유용성은 수학을 이용하는 사람에게 처한 사회적 환경에 따라 수학이 많은 다양성을 지닌다는 것이다. 일반적으로, 기초성과 유용성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 일상생활에 필요한 지식 · 기능의 양성
② 수학 연구를 비롯하여 타 교과의 이해에 필요한 지식 · 기능의 양성
③ 직장이나 전문적 분야에서 쓰이는 지식의 습득
④ 일상생활에서 직면하는 여러 가지 문제해결 능력의 증진

(2) 추상성 · 일반성에서 도출되는 목표

수학의 본질은 그 추상성에 있으며 수학의 학습은 추상화하는 활동이 중심이 된다. 수와 식, 도형 등은 그것이 추상적인 개념으로 취급되기 때문에 단순화되어 있고, 법칙이 발견되며, 논리적으로 다룰 수가 있는 것이다. 추상화에 의하여 구축된 수학은 객관적 · 보편적인 것이므로 광범위하게 구체적인 장에서 활용할 수 있다. 일반적으로, 추상성과 일반성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 구체적 활동이나 조작에 의한 추상화된 개념의 형성과 일반적 원리의 이해
② 자연 현상의 일반적인 원리를 도출하는 능력의 양성
③ 사회 현상을 해석할 수 있는 패러다임의 구성 능력 양성

(3) 기호성 · 형식성에서 도출되는 목표

수학은 추상 작용에 의해 얻어진 개념이나 원리를 기호화하고, 기호에 따라 사고를 이끌어 간다. 그 기호는 사실을 객관적으로 나타낼 수 있으며, 타인에게 정확하게 전달하는 역할을 수행할 수 있다. 수학적 언어는 매우 형식화되어 있는 것이 특징으로 형식적인 취급이 허용되며, 형식적인 논리를 전개할 수 있다. 일반적으로, 기호성과 형식성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 함축성이 큰 언어 체계로서의 수학 기호와 개념의 관계적 이해력 증진
② 활동적 표상, 영상적 표상, 기호적 표상 등 다양한 수학적 의사소통 능력의 향상
③ 객관성과 경제성을 가진 수학 언어의 가치 인식

(4) 논리성 · 계통성에서 도출되는 목표

수학은 논리성과 체계성에 있어서 뛰어난 특징을 지니고 있다. 수학에서는 귀납이나 유추에 의해서 얻어진 사실이라도 그것이 참임을 연역적으로 확인하고, 다시 그것을 체계적으로 정리해 가고 있다. 수학은 논리에 의하여 누적된 하나의 유기적 · 계통적인 학문이라고 할 수 있다.

일반적으로, 논리성과 계통성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 규칙성의 인식과 가설 설정을 위한 귀납적 추론 능력의 증진

② 합리성에 의한 타당한 논증을 위한 연역적 추론 능력의 증진

③ 수학의 공리적 성질의 이해와 이를 토대로 한 논리의 전개 능력 증진

(5) 심미성 · 과학성에서 도출되는 목표

수학을 탐구하는 사람들은 그 아름다움의 본질에 매료되는 경험을 한다. 고대의 건축물이나 생활용품 등에서의 심미성 추구를 위한 황금비의 구현이나 정다면체를 포함한 기하학적 도형에 대한 탐구 등이 그 예이다.

한편, 과학은 모든 사물 간에 존재하는 법칙을 정립하는 것을 생명으로 하며, 그 방법으로써 귀납과 연역이 쓰인다. 수학도 다른 과학과 마찬가지로 합리성과 실증성, 귀납과 연역, 분석과 종합 등에 의하여 연구가 진행된다.

수학을 학습함에 있어서는 이 심미성과 과학성을 소중히 여기는 학습이 필요하다. 일반적으로, 심미성과 과학성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 이미 배운 여러 가지 정보를 새로운 문제 상황에 적용하여 해결함으로써 수학의 가치와 소중함을 인식

② 수학적 지식이나 성향의 여러 측면을 통합하는 능력의 양성

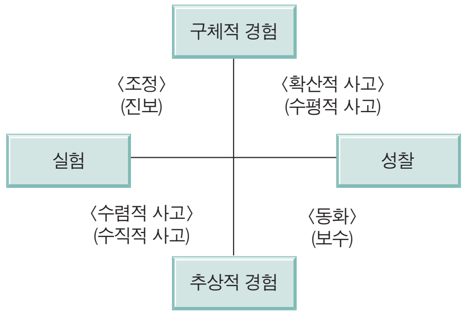
③ 자연 현상이나 사회 현상의 예측과 설명에 의한 수학적 힘의 신장

03 수학적 사고력

수학적 사고는 수학적 개념이나 원리 · 법칙 등이 생성되는 과정에서 작용하는 사고이다. 이때, 여러 가지 유형의 사고를 논할 수 있지만, 직관과 논리가 그 중심이라고 할 수 있다. 직관과 논리는 서로 상반되는 듯한 인식이면서도 상보적인 역할 관계에 있으며, 동시에 일어나는 것은 아니지만 수학적으로 사고하는 경우 긴밀한 연대성이 요구되는 것이다. 직관으로 계획을 세워서 논리로 정리하고 확인하게 되며, 또한 논리적으로 정리된 결과야말로 거기서부터 새로운 직관이 생성되는 것이다. 이러한 양자의 관계에 대한 배려는 뛰어난 교사가 경험적으로 터득하고 있는 수업의 지혜라고 할 수 있는 것이다.

04 수학적 창의력

창의력이란 다음 그림과 같은 인지의 종류 중 확산적 사고의 영역에 해당하는 것으로, 주어진 문제 상황에서 미지의 정보를 이용한 새로운 생각들로 새로운 형태의 문제해결을 발현시키는 것이라 볼 수 있다.



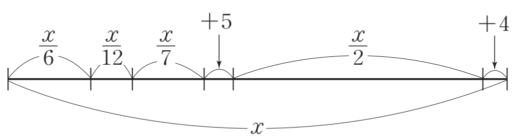
인지의 종류

창의력은 무의식의 세계에서 돌출하는 분수 감정(噴水感情)에 의한 정상 경험(頂上經驗)이며, 정상 경험의 조건들로는 완미 경험(完美經驗), 지적 발견(知的發見), 음악적 감별(音樂的鑑別) 등을 들 수 있다. 월러스(Wallas, G. ; 1858～1932)에 의하면 창의성의 과정은 고육 준비(苦肉準備), 부화(孵化), 섬광(閃光), 확인(確認)의 과정을 거친다.

다음은 디오판토스(Diophantos ; ? 200～? 284)의 묘비에 적혀있는 내용을 요약한 것이다.

'그는 생의 $\frac{1}{6}$ 을 소년으로, $\frac{1}{12}$ 을 청년으로, $\frac{1}{7}$ 을 미혼으로 살았다. 그의 아들은 결혼 후 5년 만에 태어났으며, 그보다 4년 먼저 사망하였다. 아들의 생애는 그의 절반이었다.'

이때, 그가 사망한 나이를 구하고자 하면 사망한 나이를 x로 놓고 다음과 같이 식을 세워 푸는 것이 보통이다.



$$\frac{x}{2}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right)x+9 \qquad \therefore x=84$$

그런데 보통의 풀이와 다른 독특한 방법에 의한 다음과 같은 풀이가 창의력이 발현된 사례라 볼 수 있다.
첫 번째 단계는, 나이는 일반적으로 0에서 100 사이의 자연수로 표현된다는 가정을 세운다. 따라서 자연수 해를 구하면 된다.

두 번째 단계는, 나타나는 분수 $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}$ 역시 자연수인 아버지의 삶의 기간을 대상으로 하고 있다. 결정적으로 분모 6, 12, 7은 0과 100 사이에서 공배수를 거의 갖지 않으므로 최소공배수를 계산하면 된다는 것이다. 따라서 그의 나이는 84세이다.
이 풀이에서 문제를 해결하기 위한 보다 복잡한 방법은 직관, 경험, 그리고 그 문제의 본질에 함축된 어떤 그럴 듯한 가정들에 기초를 두고 있다.

〈참고 자료〉

1. Ernest, P. (1991), The philosophy of mathematics education, The Falmer Press
2. Howson, A. G., Keitel, C., Kilpatrick, J. (1981), Curriculum development in mathematics, Cambridge University Press
3. Kilpatrick, J. (1995), Curriculum change locally and globally, in R. P. Hunting, G. E. Fitzsimons, P. C. Clarkson, A. J. Bishop (Eds.), Regional collaboration in mathematics education(pp. 19～29), Monash University
4. Lucas, J. F. (1989), Heuristic thinking and mathematics, Contributed paper, AMS—MAA Mtg. Pheonix, AZ
5. Ness, H. (1993), Mathematics, an integral part of our culture, in A. M. White(Eds.), Essays in humanistic mathematics, Note No. 32, The Mathematical Association of America

Ⅱ. 수학 교수 · 학습 이론 및 방법

1. 수학 교수 · 학습 이론

01 피아제의 지적 발달 이론

1969년 피아제(Piaget, J. ; 1896～1980)는 인간의 인지 발달이 감각 운동기(생후 약 2년까지), 전조작기(약 2~7세), 구체적 조작기(약 7~11세), 그리고 형식적 조작기(약 11세~성인)의 네 단계로 진행된다고 이론화하였다. 이 단계들은 연속적이며, 전 단계를 토대로 구축된다.
구체적 조작기와 형식적 조작기가 중 · 고등학교와 관련성이 매우 높다. 이 두 단계를 구별짓는 기준은 논리적 사고력이다. 논리적 사고력은 비율 논리, 확률 논리, 상관 논리, 변인 통제 논리, 조합 논리 등의 하위 범주들로 구별할 수 있다. 단적으로 표현한다면, 구체적 조작기의 아동의 사고는 실체가, 형식적 조작기의 아동의 사고는 가능성이 지배한다고 볼 수 있다.

피아제 이론에 따르면, 인지 발달은 네 가지 요소들, 즉 물리적 성숙, 경험, 사회적 전수, 그리고 자아 통제의 상호 작용에서 기인한다. 물리적 성숙은 신경계와 내분비선 호르몬계의 유기적 성숙을 말한다. 경험은 대상들에 대한 활동을 수반하는 물리적 경험과, 물리적 활동들의 정신적 조정을 수반하는 논리· 수학적 경험으로 구성된다. 사회적 전수는 사회적 상호 작용뿐만 아니라, 언어적 · 교육적 경험들을 포함한다. 자아 통제는 현존하는 도식이 불충분하여 동화와 조절의 보상 단계들로 이루어질 때, 새로운 정신적 도식을 활동적으로 창출하는 과정이다.
지적 발달에 영향을 미치는 요소들과 아울러 청소년들의 수학 교육의 시사점을 탐색해 보자. 여기서 중요하게 고려해야 할 점은 많은 학생들이 아직도 형식적 조작기에 이르지 못하였다는 것이다. 이를 극복하기 위하여 다

음과 같은 방안을 염두에 두어야 한다.

가. 구체적인 것에서 추상적인 것으로 나아간다.

나. 학생 활동에 기초하여 가르친다.

다. 자아 통제를 통하여 가르친다.

02 딘즈의 수학 학습 이론

딘즈(Dienes)는 수학적 개념들이 발전적인 단계별로 학습된다고 믿는다. 이 단계들은 피아제의 지적 발달 단계들과 다소 유사하다. 그는 수학적 개념들의 교수와 학습에서 다음의 6단계를 설정하고 있다.

가. 자유 놀이 단계

나. 게임 단계

다. 공통성의 탐구 단계

라. 표현 단계

마. 기호화 단계

바. 형식화 단계

딘즈는 'Building up mathematics' 라는 그의 저서에서 그의 수학 교수의 체계를 개념의 교수를 위한 네 가지 일반적인 원리들로 요약하고 있는데, 위의 6단계는 이러한 네 가지 원리들을 정교화한 것이다.

(1) 역동적 원리

예비적 게임, 구조화된 실습용의 게임 그리고 반영적인 유형의 게임 등은 각 유형의 게임이 적절한 때에 도입되기만 하면, 수학적 개념들이 결국에는 구성될 수 있는 필요한 경험들로 제공되어야 함에 틀림없다. 역동적 원리란 장래에 그것으로부터 수학적 개념을 구성해 낼 수 있는 쌓기 나무 놀이나 종이접기 놀이, 또는 게임 등을 경험시켜 두어야 한다는 것이다.

(2) 구성적 원리

게임들의 구조화에서 구성은 언제나 분석에 선행되어야 한다. 분석은 12세까지는 아동들의 학습에서 거의 존재하지 않는 것이다. 따라서 구성의 원리란 수학의 학습에서는 구성이 분석에 선행되어야 한다는 원리인데, 여기에서 구성이란 물체를 만들거나 전체를 파악하는 것이고, 분석이란 물체를 분해하거나 세부를 검토하는 일 또는 어떤 근거를 묻는 것을 말한다. 공간도형의 학습에서 이를 적용하면 공간도형이나 단면을 만드는 것이 선행되고, 이어서 그 성질의 분석이나 성질의 근거를 조사하는 학습이 이루어지는 것이 좋다는 것이다.

(3) 수학적 다양성의 원리

변인들을 포함하는 개념들은 가능한 한 최대의 변인들을 포함하는 경험들에 의하여 학습되어야 한다. 수학적 다양성의 원리는 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것과 변화시킬 수 없는 것이 있는데, 변화시킬 수 있는 것은 가능한 한 변화시켜서 다양하게 제시하여야 한다는 것이다. 예를 들어, 평행사변형의 지도에서 변의 길이, 각, 위치 등 가변적인 요소는 여러 가지로 변화시킨 것을 보여 주어야 한다.

(4) 지각적 다양성의 원리 또는 다각적 구현의 원리

아동들이 추상화의 수학적 진수를 축적하도록 유도하기 위해서 뿐만 아니라, 개념 형성에서 개인적 변동에 대하여 가능한 많은 모습들을 허용하기 위하여, 똑같은 개념적 구조는 가능한 한 많은 지각적 동치물들의 형태로 제시되어야 한다. 예를 들어, 평행사변형의 경우 종이, 대나무, 살, 고무줄 등 다양한 재료를 이용하여 만든 것을 보여줄 수 있도록 해야 한다는 것이다.

03 브루너의 인지 경로에 따른 수학 학습 과정

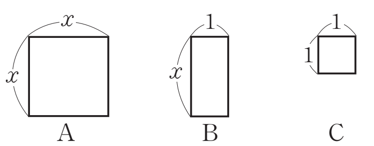
브루너(Bruner, J. S. ; 1915~)는 지식의 구조(structure of knowledge) 이론에서 어떤 영역의 지식도 다음과 같이 활동적(E) · 영상적(I) · 상징적(S) 표상의 세 가지 과정으로 나타낼 수 있다고 하였다. 첫째, 학습자에게 제시하는 개념 · 지식 구조를 이해하는 데는 실물 그대로의 제시를 통하여 행동화, 조작화의 신체적 동작으로 표현하는 활동적 표상 양식(enactive mode of representation)의 조작적인 활동이 중심이 된다. 이 과정의 의미는 수학적인 개념이나 원리 · 법칙 등을 구체적인 행동화, 조작화 등의 적절한 운동 반응을 통하여 무엇을 어떻게 하는가를 아는 데에 있다.

둘째, 개념을 충분히 정의하지 않고도 영상을 통해서 그림이나 모형으로 지식을 이해하는 영상적 표상 양식(iconic mode of representation)은 내적인 심상에 근거를 두고 시각적 또는 다른 감각적 조작에 의하여 지식을 그림이나 도식으로 표현하는 것에 그 의미가 있다.
셋째, 법칙과 원리에 의해 지배되는 상징적 체제에서 배출된 논리적 명제에 의한 기호나 문자식으로 지식을 이해하는 상징적 표상 양식(symbolic mode of representation)은 융통성 있는 사고 체계에 근거를 두고 언어나 문자, 기호 등을 사용하여 지식을 표현하는 것으로, 고차적인 문제해결 능력의 기초가 된다.
학습 내용을 전달하는 의사소통원을 도식화하면 다음과 같다.

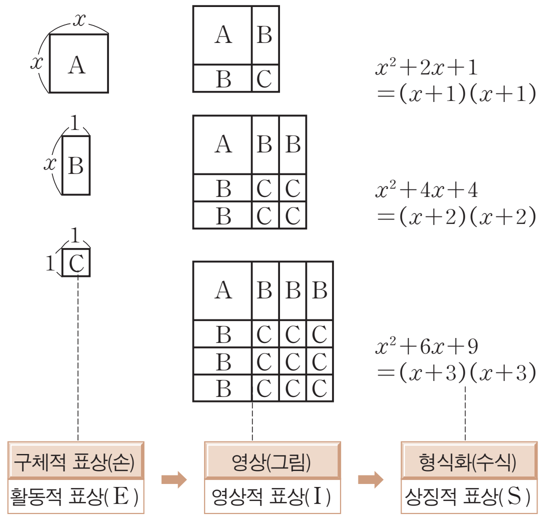
여러 가지 표상

	양식	구체적 기호	형태적 기호	상징적 기호	
		실물	그림	용어	
구체		모형	도표	기호	추상
	대상	사진	벤 다이어그램	수	
		구체물	수직선	문자	

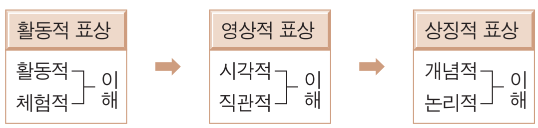
브루너는 인지 경로에 관한 EIS 이론의 바탕이 되고 있는 '2차원의 완전제곱'에 관한 수학 학습 지도의 예를 다음과 같이 들고 있다.
학습 내용은 2차원의 완전제곱형의 인수분해이다. 학습의 흐름은 주어진 자료를 조작, 구성해 보는 것에서 시작하여 자기가 구성한 수학적 원리를 영상적으로 파악하도록 하고, 나아가서 수식으로 표현하게 되어 있다.
다음 그림에서 A는 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양의 나무도막으로서 x곱하기 x를 'x네모'로, B는 가로 1, 세로 x인 직사각형 모양의 나무도막으로서 'x막대'로, C는 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 나무도막으로서 1 곱하기 1의 나무도막을 '1네모'로 각각 부르기로 한다.



아동들에게 A, B, C를 여러 개씩 나누어 주고, 그것으로 놀 기회를 충분히 준 다음 'x네모' 보다 큰 정사각형 모양을 만들어 보게 하자. 아동들은 큰 어려움 없이 다음과 같은 모양을 만들었다고 한다.



이처럼 브루너는 인지 경로 학습을 활동적 표상 → 영상적 표상 → 상징적 표상의 단계적인 학습을 요구하고 있다. 첫째 단계인 활동적 표상에서는 주로 구체물 조작에 의한 학습을 하고, 둘째 단계인 영상적 표상에서는 구체물 조작에 의해서 습득된 지식을 그림이나 도식으로 나타내어 보고, 마지막 단계인 상징적 표상에서는 영상으로 얻은 지식을 문자, 기호, 숫자 등을 사용하여 형식화하고, 이를 추상적인 수식으로 표현해 보게 하는 것을 인지 경로에 따르는 학습이라고 한다.



04 스켐프의 관계적 이해와 도구적 이해

스켐프(Skemp, R. ; 1919~1995)는 영국의 수학 교육학자로서 수학 학습 심리와 수학 교육 방법론에 관한 최대의 연구 업적을 남겼다. 스켐프는 영국의 옥스퍼드 대학에서 순수 수학을 전공하였다. 대학을 졸

업한 뒤에 수학 교육 연구에 관심을 가지고 수학을 재미있게 지도하는 방법을 연구·개발하기 위하여 대학 교수직도 사양하고 초·중등학교 교사 생활을 경험하였다. 스켐프는 훌륭한 이론은 현장에서 나온다는 신념에 따라 교사 생활을 하면서도 다시 옥스퍼드, 맨체스터, 워릭 대학에서 '심리학과 수학', '교육 심리학', '아동 심리학', '인지 발달 심리학', '수학 학습 심리학', '초등 수학 교수법' 등의 연구를 하여 수학 교수·학습 이론을 체계화하는 업적을 남겼다.

관계적 이해(relational understanding)와 도구적 이해(instrumental understanding)라는 용어는 스켐프가 1976년 'Mathematics Teaching' 이라는 학술지의 논문 발표에서 처음으로 알려지기 시작하면서부터 새로운 수학 교육 용어의 하나로 자리잡게 되었다. 스켐프는 이해를 새로운 상황을 이미 알고 있는 인지도식(scheme)과 동화(assimilation)시키는 것으로 설명하면서, 이해를 하게 되면 목표의 획득, 다른 사람과의 상호 협력, 창조적인 활동을 더 잘 할 수 있게 된다고 하였다.

관계적 이해란, 문제 해결의 방법과 이유를, 무엇을 왜 하는지를 알고 있으면서 보다 일반적인 수학적인 관계로부터 특수한 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 상태를 말하고, 도구적 이해는 적당히 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 왜 그렇게 되느냐를 알지 못한 채 기억된 능력을 문제 해결에 적용하는 상태를 말한다.

예를 들면, 삼각형의 넓이를 구하는 문제에서, 첫째 날은 직각삼각형이 그려진 모눈종이를 등적변형(等積變形)시켜 직사각형으로 만들고 이들의 관계에서 삼각형의 넓이를 구하는 공식 '(밑변)×(높이)÷2' 를 만들어 내는 수업을 한다. 둘째 날은 만들어 낸 공식을 이용하여 실제로 삼각형의 넓이를 구해 보게 한다.

이러한 수업 과정에서 어떤 학생이 첫째 날은 결석하고, 둘째 날은 출석했다고 가정하자. 첫째 날 결석한 학생은 평소에 곱셈과 나눗셈 학습은 잘 하고 있다고 한다. 둘째 날 교사가 첫째 날 학습한 삼각형의 넓이를 구하는 공식 '(밑변)×(높이)÷2' 를 상기시키고 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 제시했을 때, 첫째 날 결석한 학생도 곱셈과 나눗셈을 잘 할 수 있기 때문에 공식에 수를 대입하여 삼각형의 넓이를 어려움 없이 쉽게 구할 것이다.

이 경우, 결석한 학생은 삼각형의 넓이를 구하는 학습에서 도구적 이해는 하고 있지만 관계적 이해는 하지 못했다고 볼 수 있다.

이와 같이, 결석한 학생이 주어진 공식을 적용하여 정답만을 찾아내고 삼각형의 넓이 공식을 만들어 내는 과정을 모르는 경우를 가리켜, 스켐프는 도구적 이해를 통한 삼각형의 넓이 구하는 학습을 했다고 한다.

스켐프는 최근까지도 도구적 이해를 '논리없는 규칙'으로 보고 이해로 간주하지 않았으나, 때에 따라서는 도구적 이해가 필요하다는 점을 그의 저서에서 시사하고 있다. 학생들은 도구적 이해에 의한 학습을 원하지만 관계적 이해를 목표로 하는 교사에게는 도구적 이해를 반대한다. 그러나 인지 수준상 관계적 이해가 어려운 경우에는 우선 도구적 이해로 학습한 후에 적당한 시기에 관계적 이해에 의한 학습이 요구된다.

2. 창의적 문제 해결을 위한 교수·학습 방법

01 문제란 무엇인가?

1983년 렌츠너(Lenchner)는 "문제란 개인이나 집단이 직면하여 반드시 해결을 해야 하지만, 그 해결의 분명한 경로가 보이지 않는 상황을 말한다."고 하였다. 문제와 비슷한 용어로 질문(question), 연습문제(exercise), 문제(problem) 등이 있다. 질문은 단순한 회상과 기억에 의하여 해결이 가능한 상황이며, 연습 문제는 이미 학습된 기능이나 알고리즘의 강화를 위한 반복 연습을 요하는 상황이며, 문제는 해결을 위하여 이미 학습된 지식의 분석과 종합을 요하는 상황이라고 볼 수 있다. 문제란 수용, 장벽, 탐구의 세 가지 조건을 만족하여야 한다.

02 폴리아의 문제해결 4단계

요즘 강조되고 있는 문제해결(problem solving)은 듀이(Dewey, J.; 1859~1952)의 진보주의 철학에서 그 근거를 찾을 수 있으며, 형태주의와 폴리아(Polya)의 영향을 받아 1980년대에 들어서면서 NCTM의 권고로 부활된 것으로 볼 수 있다. 이제는 실용성을 근거로 하여, 정형화된 문제보다는 수학적 지식을 이용하여 해결할 수 있는 실생활 문제의 상황을 강조하기 시작한 것이다. 문제해결을 위한 첫 단계는 문제의 이해로, 이를 위해서는 통찰에 의한 문제의 구조를 파악하는 것이 중요하다. 따라서 개념과 원리의 이해는 지속적으로 강조되어 왔다고 볼 수 있다. 최근에는 실생활 문제의 해결 기능을 증진시키기 위하여 통찰에 의한 문제의 이해뿐만 아니라 연습에 의한 암송 전략을 강조하는 정보 처리 이론(IPS Theory)이 각광을 받고 있기도 하다. 폴리아의 문제 해결 4단계는 다음과 같다.

이해 — 계획 — 실행 — 검토

03 창의적 문제해결 전략

렌츠너는 학교 수학 수업에서 창의적 문제해결력을 높이기 위해 다음과 같은 문제해결 전략을 중점적으로 지도하여야 한다고 주장한다.

가. 그림이나 도표 그리기
나. 규칙성 찾기
다. 조직화 된 목록 만들기
라. 표 만들기
마. 문제를 단순화하기
바. 시행 착오
사. 실험하기
아. 문제의 실연
자. 거꾸로 풀기
차. 식 세우기
카. 연역적 추론의 이용
타. 고정 관념 바꾸기

예를 들어, 다음과 같은 '하노이의 탑' 문제의 해결 과정에서 위의 열두 가지 문제해결 전략 중 3개의 문제해결 전략이 이용된다.

문제 상황 | 다음 그림과 같이 세 개의 나무 막대기와 그 막대기에 꼭 맞게 끼울 수 있도록 가운데에 구멍이 나 있는, n개의 서로 다른 크기의 원판으로 이루어진 장난감이 있다. 처음에는 한 막대기에 모든 원판이 걸려 있되, 가장 작은 원판이 제일 위에 걸려 있고 아래로 갈수록 점점 큰 원판들이 걸려 있다.

원판을 옮길때 한 번에 한 개씩만 한 막대기에서 다른 막대기로 옮길 수 있고, 작은 원판 위에는 큰 원판을 올려 놓을 수 없다.

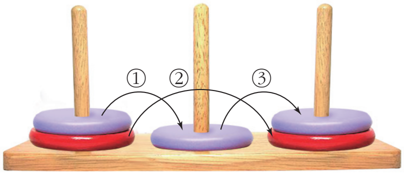
목표 | 이러한 규칙에 따라 처음의 막대기 위에 있는 모든 원판을 다른 막대기에 옮겨야 한다.

문제해결 전략 |

① n이 1일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
② n이 2일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
③ n이 3일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
④ n이 4일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
⑤ 어떤 규칙성을 발견할 수 있는가?
(규칙성 찾기)
⑥ 수학적 귀납법에 의하여 이러한 일은 (2^n-1)회의 시행으로 수행할 수 있음을 증명하여라. (거꾸로 풀기)

활동 및 풀이 |

① n이 1일 때: 1　　② n이 2일 때: 3



③ n이 3일 때: 7　　④ n이 4일 때: 15

⑤ 3개인 경우 먼저 작은 것 2개를 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 2개를 옮긴다.
즉, $3+1+3=7$이다.
마찬가지로, 4개인 경우에도 위의 3개를 먼저 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 3개를 옮겨야 하므로 $7+1+7=15$이다.

⑥ $n=k$일 때: (2^k-1)회의 시행이 필요하다면, $n=(k+1)$일 때는 ⑤에 의하여 먼저 k개를 옮긴 다음 한 개를 옮기고 다시 k개를 옮겨야 하므로 $(2^k-1)+1+(2^k-1)=2^{k+1}-1$이고 따라서 모든 자연수에 대하여 성립한다.

〈참고 자료〉

1. Lenchner, G. (1983), Creative Problem Solving in school Mathematics, Houghton Mifflin Company
2. Piaget, J., Inhelder, B. (1969), The Psychology of the Child, Basic Books, Inc
3. Bruner, J. S. (1964), The course of cognitive growth, American Psychologist, 19, pp. 1～15
4. Skemp, R. R. (1976), Relational understanding and instrumental understanding, Mathematics Teaching, No. 77, pp. 20～26

Ⅲ. 수학 교구 및 기자재의 활용

수학의 학습은 계통적으로 이루어진다고 한다. 그 원리는 생물학자인 헤켈이 주장한 "개체 발생은 계통 발생의 발달 단계를 되풀이한다."라는 표현에 근거를 두고 있다. 이는 개체는 집단의 발전을 되풀이한다는 것을 의미하는데, 이를 수학의 학습에 적용하면 대개 오랜 세월에 걸쳐 그 과목이 발전한 순서로 그 과목을 배운다는 것이다. 이를테면, 기하학 분야는 아기들이 물리적인 형태를 인지하고 모양과 크기를 비교할 수 있는 능력, 즉 단순한 관찰에 기원한 잠재적 기하학(subconscious geometry)에서 출발한다. 그 후, 컴퍼스, 자, 각도기, 가위, 풀 등을 가지고 놀거나 실험을 하면서 여러 기하학적 사실을 상당히 이끌어 내는 과학적(또는 실험적) 기하학(scientific or experimental geometry)으로 발전한 다음 보다 높은 수준인 논증적 기하학(demonstrative geometry)으로 발전한다.
그런데 고등학교 교육과정에서 과학적 기하학 수준의 학습이 충분하게 이루어져야 하는데, 이런 면이 부족하다. 다른 수학 분야에서도 비슷한 실정이다.
따라서 이번 2006년 개정 교육과정에서는 이를 보완하고자 수학의 교수 · 학습에서 다양한 구체적 조작물 및 기술 공학적 교구(계산기, 컴퓨터, 인터넷 등)를 적극 활용할 것을 권장하고 있다.
수학과 교수 · 학습에서 다양한 구체적 조작물 및 학습 기자재를 활용하면 개념, 원리, 법칙 등의 이해를 돕기에 효과적이고, 흥미를 유발하여 학생 중심으로 탐구하고, 역동적인 학습을 기대할 수 있다.

1. 계산기의 활용

계산기를 수학 교육에 활용하는 방법으로는 다음의 세 가지를 생각할 수 있다.

첫째, 실생활 문제 등과 같은 문제해결을 위해 복잡한 계산을 해야 할 경우, 계산기를 사용함으로써 정확한 값을 신속하게 구할 수 있다.

둘째, 계산기를 문제해결을 위한 소재로 활용할 수 있다. 예를 들면, 그래픽 계산기로 삼차함수의 그래프를 그리려고 할 때, 그래프의 특성과 개형을 미리 예측해 보고 화면의 크기를 정한 후 실제로 그래프를 그려서 그 예측을 확인해 보게 할 수 있다.

셋째, 수학 학습을 위한 보조 자료로 활용할 수 있다. 과학용 계산기는 거듭제곱근의 값, 삼각비의 값, 지수함수의 값, 로그의 값 등을 내장하고 있어서 이들을 학습할 때 중요한 보조 자료로 활용할 수 있다. 그래픽 계산기는 함수의 그래프에 관한 기능뿐만 아니라, 행렬과 행렬식의 계산, 문자식의 인수분해와 전개, 통계 처리 기능, 미분과 적분의 계산 등을 포함하고 있어서 수학 지도의 중요한 보조 자료로 활용할 수 있다.

계산기는 일반용 계산기, 공학용 계산기, 그래픽 계산기 등 그 형태와 기능이 다양하고, 숫자판, 표시창, 전자 기억 소자로 구성되어 있다.

① 일반용 계산기: 사칙연산이 가능한 계산기

② 공학용 계산기: 삼각비와 지수 · 로그의 계산, 통계 처리까지 가능한 계산기

③ 그래픽 계산기: 공학용 계산기의 기능에 함수의 그래프까지 그릴 수 있는 계산기

2. 컴퓨터의 활용

컴퓨터를 활용하는 것은 수학 교수 · 학습 과정의 여러 어려움을 극복하기 위한 대안으로 생각되어, 기존 수학 개념 지도의 어려움을 경감할 수 있는 방안에 대한 연구로 진행되고 있다. 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히, 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션 등을 통한 직관적 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다. 또, 산술 교육은 종래의 계산 기능 위주에서 사고력으로 옮겨갈 수 있게 되었으며, 학생들의 수학 학습을 돕기 위한 많은 소프트웨어가 개발되고 있다.

01 수학 수업에서의 컴퓨터 활용의 장점

(1) 그래픽과 애니메이션

학습 내용을 시각적으로 전달하여 학습자가 학습 내용을 쉽게 받아들일 수 있고, 학생들의 호기심을 자극하여 학습 효과를 높일 수 있다.

(2) 시뮬레이션

시간적, 공간적 제약으로 실제 경험이 불가능한 경우에 유사한 상황을 제시하여 이해를 돕고 학습 효과를 크게 높인다.

(3) 계산 능력

복잡한 계산 능력이나 자료 정리를 신속하고 정확하게 처리하여 탐구 학습에 많은 시간을 할애할 수 있다.

02 수학 수업에 활용할 수 있는 프로그램

컴퓨터가 발달함에 따라 수학 교재에 적용할 수 있는 다양한 소프트웨어가 제공되고 있다.

(1) Mathematica

울프람(Wolfram, S.)은 일리노이 대학의 복합 시스템 연구 센터에서 수학 문제라면 무엇이든지 해결할 수 있는 소프트웨어 개발을 시작했으며, 그 산물이 바로 Mathematica이다.

Mathematica의 가장 큰 특징은 첫째로 기호 계산 능력이다. 대부분의 프로그램은 수치 계산(numerical calculation)은 할 수 있지만, 기호 계산은 불가능하다. 하지만 Mathematica는 수치와 기호 계산 모두가 가능한 프로그램이다.

둘째로 Mathematica의 명령어는 일반 수학의 명령어와 기호가 흡사하여, 수학 문제의 수리적 과정을 대치하면서, 프로그램에 쉽게 접근할 수 있다.

셋째로 Word Processor로 사용할 수 있으며, html로 출력할 수 있다.

넷째로 Mathematica는 그래픽 처리와 풍부한 함수를 가지며, Mathematica의 부프로그램과의 호환 기능이 탁월하다.

(2) GSP(The Geometer's Sketch Pad)

GSP는 유클리드 기하의 도형을 구현할 수 있는 작도 프로그램의 일환으로, 기존의 정적이고 고정된 도형에서 동적이고 움직이는 도형을 관찰함으로써 기하학적 관계를 보다 이해하기 쉽게 해 준다. 각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선 그리기, 수직선 그리기 등 기본적인 작도 기능을 한번에 수행할 수 있고, 평행이동, 대칭이동, 회전이동의 변환도 한번에 가능하다.

GSP는 애니메이션과 드래그(Drag)를 사용하면 평면기하의 성질을 연속적이고 역동적으로 관찰할 수 있고, 또한 도형의 자취를 생생하게 보여 준다. 이로부터 도형의 성질에 대한 확실한 개념을 얻을 수 있다.

또한, 도형의 여러 요소의 색상 처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식 등의 표현이 쉽게 구현되며, 도형의 이름을 붙여 주거나 주석을 다는 등의 여러 가지 표현도 손쉽게 처리할 수 있다.

따라서 학생들의 흥미를 자극할 수 있고, 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 학습 욕구를 더욱 유발할 수 있어 효과적이다.

(3) C. a. R.

C. a. R.는 GSP와 마찬가지로 사용법이 간단하여 중 · 고등학생이 다루기 쉬운 프로그램으로 칠판이나 종이 위에서와는 달리 도형을 조작할 수 있다. 즉, 마우스로 도형을 이동시키거나 변형할 수 있다.

이때, 선분의 끝점을 움직이면 그 선분의 수직이등분선이 그에 따라 자동으로 이동하는 등 도형들 사이의 관계가 유지된다. 그러므로 칠판이나 종이에서 불가능한 '실험' 이라든가 '시행 착오를 통한 문제 해결' 이라는 개념을 기하 수업에 도입함으로써 학생들이 도형의 성질을 직관적으로 파악하는 데 큰 도움을 얻을 수 있다. 실제로 이 프로그램을 가지고 수업을 해 보면, 앞서는 학생들이 수업 내용 밖의 발전적인 내용을 스스로 발견하는 경우나, 평소 뒤처지는 학생들이 흥미를 가지고 수업에 참여하는 경우를 많이 볼 수 있다.

또한, '과제' 기능을 이용하면 학생들이 스스로 문제를 풀고 결과를 확인할 수 있어 편리하다.

특히, 하이퍼텍스트(html) 파일을 작성하여 웹 상에서 활용하는 것이 편리하다.

더욱이 이 프로그램은 GPL 라이센스를 따르는 무료 소프트웨어로 비용이 전혀 들지 않는다.

(4) 한글 오피스 - 엑셀

엑셀은 MS Office의 5가지 프로그램 중 하나이다. 그 중 엑셀(excel)은 단순한 표 계산부터 회계, 재무 관리를 위한 프로그램이다.

엑셀의 가장 큰 특징은 자동 계산 기능이다.

엑셀의 자동 계산은 200여 가지에 이르는 '함수' 에 의하여 이루어진다.

따라서 사용자가 숫자만 치면 합계, 비율, 평균, 순위 등의 모든 결과는 엑셀이 알아서 계산한다. 또한, 200개가 넘는 함수 중에서 더하기, 빼기, 나누기, 곱하기의 4가지 함수의 사용법을 익히면 거의 모든 계산을 할 수 있고 추가로 if 함수의 사용법을 알게 되면 엑셀을 더욱 유용하게 이용할 수 있다.

(5) 그래프 마법사

사용자가 입력한 함수식을 그래프로 나타내어 주는 프로그램으로 중 · 고등학교 수학 교과 과정에서 다루어지는 모든 내용의 그래프에 대한 표현이 가능하다.

(6) 그 밖의 프로그램

① Poly : 정다면체와 준정다면체를 포함한 147개의 볼록 다면체를 자유롭게 회전시키면서 관찰할 수 있고, 입체에서 평면 전개도를 인쇄할 수 있는 프로그램이다.

② Wingeom: 2차원 도형, 3차원 다면체를 조작할 수 있는 프로그램이다.

③ TESS: 변환과 다각형의 각의 크기를 지도할 때 사용할 수 있는 프로그램이다.

④ Equation grapher: 함수의 그래프를 그리고 해석하는 프로그램이다.

⑤ GrafEq: 정함수, 음함수, 매개변수함수, 극좌표 형식의 함수 등 어떤 함수든지 그래프를 그릴 수 있고, 부등식의 영역을 표시할 수 있는 프로그램이다. 여러 개의 함수의 그래프를 동시에 그릴 수 있고, 줌(zoom) 기능도 가지고 있다.

⑥ WinPlot: 다양한 형태의 곡선, 곡면을 그릴 수 있는 프로그램이다.

⑦ Graphmatica: 다양한 형태의 곡선, 곡면을 그릴 수 있는 프로그램이다.

⑧ Winstat: 변량에 대한 그래프, 히스토그램, 확률분포 곡선 등을 그려 주는 통계 프로그램이다.

3. 웹 사이트(web site)의 활용 및 매개 커뮤니케이션의 활용

개인용 컴퓨터가 일반화되고 네트워크 시스템이 구축됨에 따라, 인터넷을 활용하여 자신이 가진 정보를 공유하고 지속적으로 확대시켜 나갈 수 있게 되었다.

이에 따라 수학 교수 · 학습에 필요한 많은 정보를 활용할 수 있게 되었다.

01 웹 사이트 활용 학습

인터넷을 이용하여 여러 정보를 모으고 활용하는 것이 가능하다. 또한, 문제은행식으로 구성된 사이트에서 수학 문제를 풀어 보고 그 결과를 알아볼 수 있다.

한편, 수학사나 수학자 등을 조사하여 학습에 활용할 수 있다.

02 매개 커뮤니케이션을 활용한 학습

메일을 이용하여 교사나 친구 등 여러 사람에게 학습 과제에 대한 도움을 받고, 과제를 제출할 수 있다. 또한, 탐구 학습에서 친구들과 대화방을 만들어 문제 해결 과정에 대하여 서로 의견을 나누는 등 여러 가지로 활용할 수 있다.

4. 수학 교구

01 산가지

우리나라에서는 조선 말까지 산가지를 이용하여 계산하였다. 산가지는 대나무 가지를 세모꼴 막대 모양으로 만들어 이용한 계산 도구로, 현재 국립 민속박물관에 남아 있는 산가지의 길이는 약 15 cm이다. 산가지를 늘어놓을 때는 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자를 놓을 때마다 세로, 가로로 번갈아 늘어놓았으며, 음수를 나타낼 때는 산가지 위에 어슷하게 산가지를 한 개 더 올려 놓았다고 한다.

또, 이와 비슷한 산목이란 것을 이용하여 이차방정식까지도 풀었다고 한다.

02 계산패

곱셈을 할 때 사용했던 셈기구이다.

03 기하판 (geometric board)

다양한 도형의 넓이를 구하게 하여 창의력을 신장할 수 있는 수학 교구이다.

04 대수판 또는 대수막대(algebraic board 또는 algeblock)

대수판은 10진막대 또는 대수막대 등 여러 가지로 활용된다.

대수막대는 최근에 소개된 교구로 변수의 개념을 직접 손으로 만져 볼 수 있는 모델로 만들었다는 데 그 의의가 있다고 하겠다. 이 교구에는 x, y, x^2, xy, x^2y, xy^2,

x^3 등을 나타내는 대수막대들이 있고, 각종 계산의 모형을 만드는데 보조 역할을 하는 여러 가지 판들이 있다. 대수막대를 사용하면 정수의 연산과 변수의 연산을 직접 막대를 가지고 확인할 수 있으며, 다항식의 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 심지어 간단한 방정식의 계산도 할 수 있다. 대수막대는 두꺼운 종이로 간단히 만들 수 있다.

05 삼항식

대수막대의 변형된 형태로 8개의 조각으로 정육면체를 만드는 퍼즐 형태의 교구로, 세제곱의 전개를 이해하는 데 도움이 되는 교구이다.

06 그림자 퍼즐(실루엣 퍼즐)

도형을 여러 조각으로 나눈 몇 개의 조각을 가지고 여러 가지 모양을 만드는 퍼즐을 그림자 퍼즐이라고 한다.
중국 고대의 탱그램(tangram) 게임에 기초한 것으로 우리나라에서는 칠교 놀이로 널리 알려져 있다. 이것을 발전시킨 것으로 T자, F자, 악마의 퍼즐이라고 불리는 kobold 등이 소개되어 있다.

〈참고 자료〉

1. 김원종(1993), 인공 지능을 활용한 수학 교육의 코스웨어, 한국 수학 교육 학회
2. 류희찬(1997), 수학 교육에서의 컴퓨터 활용: 현황과 과제, 청람 수학 교육

5. 수학과 추천 사이트

01 수학 학습 관련 사이트

- http://www.kms.or.kr/

대한수학회 홈페이지로 수학 용어를 검색할 수 있고, 한국수학올림피아드에 관한 소식 등 다양한 소식이 소개되어 있다.

- http://www.tmath.or.kr/

사단법인 전국수학교사모임 홈페이지로 수학과 수학교육에 대한 다양한 정보가 소개되어 있다.

- http://mathforum.org/

The Math Forum 홈페이지이다.
여러 수학 문제와 퍼즐 수학 관련 소식 등이 소개되어 있다.

- http://primes.utm.edu/

소수에 대한 여러 가지를 설명한 사이트이다.

- http://www.mathnet.or.kr/

한국과학기술원 수리과학연구정보센터 홈페이지로 수학과 관련된 사이트를 잘 정리하여 소개하였고 최근 수학계 연구 동향 및 학술 정보, 수학자 정보 등을 제공하며 수학 경시 대회, 수학 교육 관련 내용 등이 소개되어 있다.

- http://math.exeter.edu/

Wingeom, Winplot 등의 수학 관련 프로그램을 내려 받을 수 있다.

- http://www.peda.com/

GrafEq, Poly, Poly Pro, Tess 등의 프로그램을 내려 받을 수 있다.

02 퍼즐 관련 사이트

- http://www.cimt.plymouth.ac.uk/

엑서터(Exeter) 대학의 Centre for Innovation in Mathematics Teaching에서 만든 사이트로 다양한 레크레이션 수학을 소개하고 있다.

- http://user.chollian.net/~badang25/bdh03.htm/

칠교 놀이, 소마큐브, 펜토미노, 도형 조각 퍼즐 등 다양한 퍼즐이 소개되어 있다.

• http://www.stetson.edu/~efriedma/
스테츤(Stetson) 대학에서 수학과 컴퓨터학을 담당하는 교수인 Erich Friedman이 만든 사이트로 재미있는 퍼즐이 많이 소개되어 있다. 더욱이 창의적인 사고를 하게 하는 문제가 많이 소개되어 있다.

03 계산기 관련 사이트

• http://matrix.skku.ac.kr/sglee/
성균관 대학교 이상구 교수의 홈페이지로 그가 만든 공학용 계산기와 그래픽 계산기를 컴퓨터에서 직접 사용할 수 있다.

Ⅳ. 2006년 개정 수학과 교육과정의 해설

1. 수학과 교육과정 개정의 배경

01 개정의 필요성

21세기 지식 기반 사회에 적합한 인재는 숙련된 단순 기능인보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간이라고 할 수 있다. 이를 위하여 초 · 중등학교 수학과에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 추측하며 논리적으로 추론하는 수학적 사고력, 수학을 이용하여 정보를 처리하고 의사소통을 하는 능력, 수학적 지식과 방법을 활용하여 실생활이나 다양한 분야의 문제를 창의적으로 해결하는 문제해결력, 수학의 유용성과 가치를 이해하고 활용하는 능력, 수학에 대한 흥미와 자신감 등을 기르는 것이 필요하다.

1950년대 말 미국에서 수학 교육 현대화 운동이 시작된 이후로 세계 각국의 초 · 중등학교 수학과 교육과정에는 많은 변화가 있었다. 이 운동의 영향으로 초 · 중등학교 수학과 교육에 집합, 대응, 행렬 등과 같은 현대적인 수학 내용이 도입되었고, 정확한 수학적 용어와 기호 사용, 엄밀한 증명 등이 강조되었다. 1970년대에는 수학 교육 현대화 운동에 대한 비판과 반성이 나타나면서 '기본으로 돌아가기(back to basics)' 운동이 전개되었고, 1980년대에는 전 세계적으로 문제해결력을 강조하였으며, 1990년대 이후에는 문제해결력을 비롯하여 여러 고등 사고 능력을 포괄하는 수학적 힘의 신장을 강조하고 있다.

우리나라 초 · 중등학교 수학과 교육과정도 이러한 세계적인 흐름의 영향을 받아 점진적으로 변화되어 왔다. 1973년에 고시된 제3차 수학과 교육과정은 수학 교육의 현대화 운동의 영향을 받아 집합 언어를 기초로 하

는 현대적인 수학 내용을 도입하였고, 엄밀한 수학적 증명을 강조하였다. 그러나 1981년에 고시된 제4차 수학과 교육과정부터는 학생 수준을 고려하여 수학적 엄밀성에 대한 강조를 점진적으로 완화시키고 수학 학습 내용을 감축하는 한편 수학적 문제해결력 신장을 강조해왔다. 1997년 말에 고시된 제7차 수학과 교육과정은 수학적 힘의 신장을 강조하는 수학 교육의 세계적 동향 및 학습자의 자율과 창의성에 바탕을 둔 소위 학생 중심 교육과정이라는 총론의 기본 정신을 반영하여 구성되었다.

제7차 수학과 교육과정은 학교 교육을 공급자 중심에서 수요자, 즉 학생 중심으로 바라보도록 그 관점을 전환시켰고 학생들이 자신의 진로, 적성, 흥미, 필요에 맞게 과목을 선택하여 이수할 수 있도록 학생 선택의 자율권을 확대하였다는 점에서 긍정적 기여를 하였지만, 학교 현장에 적용 · 운영되는 과정에서 문제점을 드러내었고, 이에 대한 개선 요구가 줄곧 제기되었다. 또한 제7차 수학과 교육과정에서는 수학 교육의 세계적인 흐름을 반영하여 수학적 힘의 신장을 강조하였지만 다소 미흡한 점이 있었고, 현대 사회의 빠른 변화에 적응하고 미래 사회에 더욱 적합한 수학 교육을 요청하는 국가 · 사회적 요구가 많았다.

제7차 수학과 교육과정에 대한 개선 요구 사항을 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

(1) 단계형 수준별 교육과정의 개선 필요

제7차 교육과정에서는 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지의 국민 공통 기본 교육 기간에는 학생의 능력과 수준에 맞는 수학 수업을 위하여 수학 교과는 단계형 수준별 교육과정을 편성, 운영하도록 하였다. 단계형 수준별 교육과정에 따르면 학생들은 학년에 관계없이 자신의 능력과 수준에 맞는 단계의 수학 수업을 듣도록 하고, 매 단계를 마칠 때마다 해당 단계 도달 여부를 확인하는 평가를 실시하여 그 단계의 수준에 도달하지 못했으면 그 단계를 재이수하거나 특별 보충과정을 이수해야 한다. 모든 학생들이 자신의 능력과 수준에 적합한 수학 교육을 받을 수 있도록 하는 것은 우리나라뿐만 아니라 세계적으로 강조되는 현상이다. 그러나 우리나라 학교 현실을 고려할 때 단계형 수준별 교육과정은 개선될 필요가 있었다.

(2) 교육 내용의 적정화 필요

제7차 교육과정에서는 이전에 비하여 수학 교과의 내용을 30 % 감축하도록 하였다. 그러나 제7차 교육과정에서 수학과 수업 시간이 축소됨에 따라 학습량 감축이 실질적인 효과를 거두지 못하였다(신성균 외, 2005).

또한 수준별 교육을 강화하기 위하여 제7차 교육과정에서는 국어, 사회, 수학, 과학, 영어 교과의 경우, 교육과정에 기본 과정과 함께 심화 과정도 함께 제시하도록 하였다. 이러한 심화 과정의 내용이 수학 교과서에 기본 내용과 함께 제시되자, 교과서에 나오는 내용은 모두 지도해 달라는 학생과 학부모의 요구에 따라 각 학교에서는 학생의 수준에 관계없이 모든 학생들에게 기본 과정의 수학 내용뿐만 아니라 심화 과정의 수학 내용도 모두 지도하게 되면서 학습량이 과다하고, 학습 수준이 지나치게 높다는 비판을 받게 되었다(박선화 외, 2005).

한편, 무리하게 수학 교과의 내용을 감축하는 과정에서 일부 학습 주제가 학년 간, 교과 간 연계성이 떨어지고, 내용 영역 구분 방식에 따라 연관된 수학 내용을 분리하여 지도하도록 함으로써 학습 효과가 떨어지는 문제도 발생하였다(신성균외, 2005).

(3) 수학적 능력 신장의 강조 필요

1990년대 이후로 학교 수학 교육에서 강조하는 세계적인 흐름의 하나가 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력과 같은 수학적 능력의 신장을 강조하는 것이다. 제7차 수학과 교육과정도 이러한 세계적 흐름을 반영하고는 있지만 다소 미흡하였다.

(4) 수학에 대한 정의적 태도 개선 필요

그동안 수학과 교수 · 학습에서는 문제해결력 신장과 같은 인지적 측면을 주로 강조해왔다. 그러나 학

생들의 수학에 대한 정의적 태도가 개선되지 않으면 학생들의 수학적 능력의 향상을 기대하기 어렵고, 점차 수학 학습을 기피하거나 수학에 대한 두려움이나 혐오감을 가지는 학생들이 증가하게 되어, 학생 개인의 경쟁력뿐만 아니라 우리나라의 국가 경쟁력도 저하될 우려가 있다. 특히, 최근에 실시한 국제 학업 성취도 비교 연구 결과를 살펴보면, 우리나라 학생들의 수학 성취도는 최상위권이지만, 수학에 대한 자신감과 수학의 가치에 대한 인식이 상대적으로 매우 낮고, 초등학교에서 중학교로 올라갈수록 수학 학습에 대한 흥미도가 점점 낮아지는 등 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나고 있어, 이를 개선하려는 노력을 적극적으로 기울일 필요가 있다(이미경 외, 2004a).

02 개정의 기본 방향

2007년에 개정 고시된 2007년 개정 교육과정의 개정의 기본 방향은 제7차 교육과정의 기본 철학 및 체제 유지, 단위 학교별 교육과정 편성 · 운영의 자율권 확대, 국가 · 사회적 요구사항의 반영, 고등학교 선택 중심 교육과정 개선, 교과별 교육내용의 적정화 추진, 수업 시수 일부 조정의 6가지였다(교육인적자원부, 2007a). 2006년에 개정 고시된 2006년 개정 수학과 교육과정은 2007년 개정 교육과정과 동일한 방향에서 개정이 추진되었다. 따라서 2006년 개정 수학과 교육과정에서는 2007년 개정 교육과정의 개정의 기본 방향 중에서 수학과 국민 공통 기본 교육과정과 관련된 사항과 앞에서 논의한 제7차 수학과 교육과정 개정의 필요성을 반영하여 개정의 기본 방향을 다음과 같이 6가지로 설정하였다.

(1) 제7차 교육과정의 기본 철학 및 체제 유지

제7차 교육과정의 기본 철학은 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인재 양성을 목표로 하면서 학습자 중심의 교육과정을 추구하는 것이었다. 이에 따라 개정 수학과 교육과정에서는 학생의 능력과 수준, 적성에 적합한 수준별 교육을 지속적으로 실시할 수 있는 기반을 제공하도록 한다. 또한 제7차 교육과정의 체제를 유지하기로 함에 따라 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지는 국민 공통 기본 교육과정 체제로 편성 · 운영하고, 고등학교 2, 3학년은 선택 중심 교육과정으로 편성 · 운영하도록 한다.

(2) 수준별 수업의 편성 · 운영 권한의 학교 부여

제7차 교육과정에 이어 2007년 개정 교육과정에서는 단위 학교의 교육과정 편성 · 운영 권한을 더욱 확대하는 것을 기본 방향으로 하고 있다. 이에 따라 수학과에서도 수준별 교육에 필요한 심화 또는 보충 과정의 학습 내용을 단위 학교에서 선정하여 지도할 수 있도록 한다. 즉, 국가 수준의 교육과정에서는 모든 학생들이 필수적으로 학습해야 할 수학과 학습 내용만 제시하고, 단위 학교에서는 각 학교 학생의 능력과 수준, 적성에 적합하게 수학과 교육 내용 및 방법을 재조직하여 지도할 수 있도록 수준별 수업의 편성 · 운영 권한을 각 학교에 부여하도록 한다.

(3) 국가 · 사회적 요구사항 반영

수학과와 관련된 국가 · 사회적 요구사항으로는 학생들의 진로와의 연계성을 강화한 수학 학습이 이루어질 수 있도록 해달라는 것이다. 따라서 개정 수학과 교육과정에서는 학생들이 미래에 전공하게 될 학문 분야나 직업의 세계에서 필요로 하는 수학을 충실히 학습할 수 있도록 수학과 교육 내용을 개선하도록 한다.

(4) 수학과 교육 내용의 적정화 추진

개정 교육과정에서는 수학과 교육 내용을 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성, 학습량, 난이 수준, 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성 측면에서 적정화하도록 한다. 즉, 다음 학년의 내용을 학습하거나 미래 사회를 살아가는 데 필요한 수학과 교육 내용을 정선하고, 수학 수업 시간을 고려하여 학생들의 수학 학습량과 난이 수준을 적절하게 조정하도록 한다. 또한 제7차 수학 교육과정의 문제점으로 지적된 일부 학습 주제의 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성 부족 문제를 해결하도록 한다.

(5) 수학적 능력 신장 추진

초·중등학교 수학 교육의 주요 목표인 수학적 능력 신장은 개정 수학과 교육과정에서도 지속적으로 강조하도록 한다. 특히, 수학적 의사소통 능력 신장을 강조하는 세계적인 추세를 우리나라 수학과 교육과정에도 반영하도록 하며, 논리적 추론 능력, 개연적 추론 능력, 문제해결력 등의 신장을 강조한다.

(6) 수학에 대한 정의적 태도 개선 추진

학생 개인뿐만 아니라 우리나라의 국가 경쟁력 강화를 위해, 학생들이 수학 학습에 관심과 흥미를 갖게 하고, 수학 학습에 자신감을 갖도록 하며, 수학의 유용성과 가치를 인식하게 하는 등 수학에 대한 정의적 태도를 개선하도록 한다.

2. 우리나라 수학과 교육과정의 변천

광복 후 우리나라 수학과 교육과정 개정의 기본 방향을 정리하면 다음과 같다.

(1) 교수요목의 시기(1946~1954)

- 교과의 지도 내용을 상세히 표시하고, 기초 능력을 배양하는 데 주력한다.
- 교과는 분과주의를 채택하고, 체계적인 지도와 지력의 배양에 중점을 둔다.
- 우리나라의 교육 목표인 홍익인간의 정신에 입각하여 애국애족의 교육을 강조하고, 일제의 잔재를 정신이나 생활에서 시급히 제거한다.

(2) 제1차 교육과정의 시기(1954~1963)

교수요목의 시기의 문제점을 개선하며, 학생들이 필요로 하는 욕구와 사회의 요구를 참작하고, 심리적인 배열과 체계적인 면을 적절히 고려하여 수학의 기본적인 개념이나 원리를 알게 하고, 사고 능력의 양성, 기초적인 과정과 상호 관계, 문제해결과 응용 능력, 기능의 숙달 등에 대하여 그 내용을 결정하고 지도 방법을 개선함으로써, 결과적으로 교육 목적을 달성하는 데 좋은 효과를 올려야 한다.

(3) 제2차 교육과정의 시기(1963~1973)

- 수학의 체계를 근간으로 계통적인 내용을 학생의 심신 발달의 단계에 맞고 다음 교과와 병행할 수 있도록 학년별로 안배하여, 생활 문제해결에 실천적으로 활용할 수 있도록 한다.
- 과학, 기술의 급진적인 발달에 따라 지도 내용을 충실히 하고 정비하여 논증적인 사고 능력, 수리적인 처리 기능을 기르도록 한다.

(4) 제3차 교육과정의 시기(1973~1981)

- 집합 개념을 토대로 한다.
- 수학적 구조에 중점을 둔다.
- 엄밀성을 강조한다.
- 현대 수학의 발전에 비추어 교재를 재구성한다.
- 응용면이 넓은 교재를 조기에 도입한다.

(5) 제4차 교육과정의 시기(1981~1987)

- 수학의 기초적인 개념과 기능을 강조한다.
- 수학적 구조나 논리의 엄밀성을 무리하게 강조함을 지양한다.
- 지도 내용의 양을 적정 수준으로 경감한다.
- 학습자의 발달 수준에 맞게 수준을 적정화한다.
- 문제해결력을 강조한다.

(6) 제5차 교육과정의 시기(1987~1992)

- 최소의 필수 기본 지식 및 기능을 정선한다.
- 수학적 활동을 강화한다.
- 문제해결을 강화한다.
- 정의적 측면을 강조한다.

(7) 제6차 교육과정의 시기(1992~1997)

- 범국민적 기초 소양으로서의 수학 교육을 한다.
- 수학적 사고력을 신장한다.
- 문제해결력을 신장한다.
- 수학의 실용성을 강조한다.
- 계산기나 컴퓨터를 수학적 도구로 활용한다.
- 학생의 적성, 능력, 진로 등에 적합한 학습의 기회를 제공한다.
- 다양한 교수·학습 방법과 평가 방법을 이용한다.

(8) 제7차 교육과정의 시기(1997~2007)
- 단계형 수준별 교육과정으로 구성한다.
- 수학 학습 내용을 적정화한다.
- 학습자의 활동을 중시한다.
- 수학 학습에 흥미와 자신감을 가지게 한다.
- 다양한 학습 도구를 활용한다.

(9) 2006년 개정
- 수준별 수업 운영을 권장한다.
- 교육 내용을 적정화한다.
- 수학적 능력의 신장을 강조한다.
- 수학의 가치를 재고하고 정의적 측면을 강조한다.
- 문서 체제를 개선한다.

광복 후 우리나라의 수학 교육과정의 변천을 간단히 표로 정리하면 다음과 같다.

기별	공포(고시)	근거	특징
교수요목기	1947.9.1		• 광복 전 일본 체제의 교육과정 • 실용에 치중되었으며, 지도 내용이 어렵고 과다함. • 가르칠 주제를 열거하는 교수요목의 형태 • 해방 전의 교육 내용의 답습
제1차	1954.4.20	문교부령 제 35호	• 교과 중심 교육과정 • 생활 중심 수학 교육 • 수학 용어의 한글화
	1955.8.1	문교부령 제46호 고등학교 교육과정	
제2차	1963.2.15	문교부령 제120호 고등학교 교육과정	• 경험 중심 교육과정 • 수학의 계통성 중시 • 수학 교육 현대화 운동 일부 반영
제3차	1974.12.31	문교부령 제350호 고등학교 교육과정	• 학문 중심 교육과정 • 수학 교육 현대화 운동의 정신 반영 • 수학 내용의 조기 도입 • 수학의 구조와 엄밀성 강조
제4차	1981.12.31	문교부령 제442호 고등학교 교육과정	• 수학 교육 현대화 운동의 반성 • '기본으로 돌아가기' 정신의 반영 • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 문제해결 학습의 중요성 인식
제5차	1987.3.31	문교부 고시 제88-7호 고등학교 교육과정	• 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 문제해결력의 강조
제6차	1992.10.30	교육부 고시 제1992-19호 고등학교 교육과정	• 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 정보화 사회 대비 • 문제해결력의 강조 • 다양한 평가 방법 권장
제7차	1997.12.30	교육부 고시 제1997-15호 고등학교 교육과정	• 학습자 중심 교육과정 • 수준별 교육과정(단계형과 과목 선택형) • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • '수학적 힘' 의 신장 도모
2006년 개정	2006.8.29	교육인적자원부 고시 제2006-75호 수학과 교육과정	• 현실 적합한 수준별 수업 방안 제시 • 교육 내용의 적정화 • 수학적 사고력 및 의사소통 능력 신장 강조 • 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조

3. 개정 수학과 교육과정 개정의 중점

개정 수학과 교육과정은 교육과정 개정의 기본 정신을 반영하고, 수학과 교육과정 개정의 필요성과 외국의 수학 교육 동향, 그리고 제7차 수학과 교육과정의 운영상의 문제점을 고려하여 다음과 같은 개정의 중점 사항을 설정하였다.

01 수준별 수업의 도입

수학은 학생들의 개인 차이가 가장 크게 드러나는 교과이므로, 수학 수업에서는 특히 학생들의 수준 차이에 대응되는 적절한 내용을 제공할 필요가 있다. 이러한 필요성에 따라 학생이 자기의 능력 수준에 맞는 학습을 할 수 있는 수준별 교육이 고안되었다.

제7차 단계형 수준별 교육과정은 우리나라 학교 상황에서 현실적으로 운영에 어려운 점이 많아 현재 명목상으로만 존재하고 있다. 개정 교육과정에서는 특별 보충과정을 형식적으로 운영하는 것을 제외하고는 편성 · 운영이 이루어지지 않고 있는 단계형 수준별 교육과정을 개정하여 수준별 수업 운영을 권장하고 있다. 이것은 수준별 교육과정을 도입한 본래의 취지인 '학생의 능력과 수준, 적성에 적합한 교육 실시' 라는 본질적인 정신은 살리면서도 우리나라 학교 상황에서 운영 가능한 수준별 수업을 할 수 있도록 하기 위한 것이다. 이를 위하여 각 학교에서는 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞는 수준별 집단을 편성 · 운영할 수 있도록 하였다.

수준별 교육과정의 아이디어를 내용상으로 구현한 것이 '익힘책' 의 도입이라고 할 수 있다. 심화 과정도 마찬가지이지만 보충 과정에 선정될 수 있는 내용은 학생에 따라 천차만별일 수 있으므로, 국가 수준의 교육과정에서는 이를 일률적으로 제시하지 않았다.

그 대신 익힘책의 보충 과정에 해당하는 최소 필수 내용 선정시 고려해야 할 사항이나 보충 과정 내용의 예시를 제시함으로써, 보충 과정 내용을 선정하는 데 도움이 되도록 하고 있다.

익힘책에 제시된 심화 과정은 기본 과정을 성공적으로 학습한 학생들이 발전적으로 학습할 수 있는 내용으로, 기본 과정에서 습득한 지식을 실생활에 활용하는 다양한 방법을 찾아보거나, 문제해결력의 배양과 관련된 내용이 주류를 이룬다.

그러나 심화 과정의 내용이 상위 단계에서 학습할 수학적 개념, 원리, 법칙을 미리 도입하거나 탐구하게 해서는 안 된다. 즉, 심화 과정이 속진의 의미나 난이도상의 심화로 해석되어서는 안된다.

02 선택 중심 교육과정의 구성 및 다양한 선택 과목의 설정

고등학교 2학년, 3학년에 해당되는 선택 중심 교육과정의 기본 취지는 다양한 선택 과목을 제시하고, 학생들은 자신의 능력, 진로, 적성에 부합되는 과목을 선택하여 학습할 수 있도록 한다는 것이다. 고등학교 2학년과 3학년 학생은 선택 과목 중에서 자신의 진로와 능력, 흥미 등을 고려하여 과목을 선택할 수 있다.

수학 계열의 교과목명과 상세한 구분은 다음과 같다.

- 고등학교 선택 중심 교육과정
  - 보통 교과
    - 수학의 활용
    - 수학 Ⅰ
    - 미적분과 통계 기본
    - 수학 Ⅱ
    - 적분과 통계
    - 기하와 벡터
  - 전문 교과
    - 과학에 관한 교과 : 고급 수학

(1) 수학의 활용

'수학의 활용' 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 학습한 학생이면 선택할 수 있는 과목으로, 실생활에 필요한 수학적 지식과 기능을 습득하도록 하는데 적합하다. '수학의 활용' 의 학습을 통하여 실생활의 여러 가지 문제를 수학의 관점에서 이해하고 합리적으로 해결하는 능력을 신장시키며, 수학에 대한 관심과 흥미를 길러 수학에

대한 긍정적 태도를 기를 수 있다.

‘수학의 활용’ 의 내용은 ‘명제와 논리’, ‘지수와 로그’, ‘수열’, ‘확률과 통계’, ‘도형과 그래프’ 로 구성된다.

(2) 수학 Ⅰ

‘수학 I’ 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 다음 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다. ‘수학 I’ 의 학습을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워, 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다.

‘수학 I’ 의 내용은 ‘행렬과 그래프’, ‘지수함수와 로그함수’, ‘수열’, ‘수열의 극한’ 으로 구성된다.

(3) 미적분과 통계 기본

‘미적분과 통계 기본’ 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문과학, 사회과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다. ‘미적분과 통계 기본’ 의 학습을 통하여 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워, 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다.

‘미적분과 통계 기본’ 의 내용은 ‘함수의 극한과 연속’, ‘다항함수의 미분법’, ‘다항함수의 적분법’, ‘확률’, ‘통계’ 로 구성된다.

(4) 수학 Ⅱ

‘수학 II’ 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다. ‘수학 II’ 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. ‘수학 II’ 의 내용은 ‘방정식’, ‘부등식’, ‘삼각함수’, ‘함수의 극한과 연속’, ‘미분법’ 으로 구성된다.

(5) 적분과 통계

‘적분과 통계’ 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다. ‘적분과 통계’ 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. ‘적분과 통계’ 의 내용은 ‘적분법’, ‘순열과 조합’, ‘확률’, ‘통계’ 로 구성된다.

(6) 기하와 벡터

‘기하와 벡터’ 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 과목이다. ‘기하와 벡터’ 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. ‘기하와 벡터’ 의 내용은 ‘일차변환과 행렬’, ‘이차곡선’, ‘공간도형과 공간좌표’, ‘벡터’ 로 구성된다.

03 교육 내용의 적정화

개정 교육과정에서는 수학과 교육 내용을 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성, 학습량, 난이 수준, 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성의 측면에서 적정화하였다. 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성과 관련하여 수학과 교육 내용을 적정화하였다.

실생활에 널리 활용되고 여러 나라에서 공통적으로 지도되고 있는 수학적 개념에 대한 지도를 보강하도록 하였다.

둘째, 수학의 학습량과 난이 수준을 적정화하였다.

셋째, 개정 교육과정에서는 학년 간, 학교급 간, 교과 간의 연계성을 강화하고 연관된 내용은 밀접하게 관련지어 학습할 수 있도록 함으로써 학습 효과를 높일 수 있게 하였다.

04 수학적 능력의 신장 강조

수학적 능력 신장을 강조하기 위하여 수학과 교육 목표, 내용, 교수·학습 방법, 평가 등 교육과정 전반에서 일관되게 수학적 능력 신장과 관련된 언급을 하고 있다. 예를 들어, 교수·학습 방법에서는 수학적 사고와 추론 능력 신장을 위하여 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 하며, 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합해 보며, 학생 자신의 사고 과정을 반성해 보게 하고 있다.

수학적 문제해결력 신장은 제4차 교육과정 이래로 수학 교육의 목표로 강조해 온 사항이며 미래를 살아갈 학생들에게도 지속적으로 필요한 능력이라는 점에서 개정 교육과정에서도 지속적으로 강조될 필요가 있다. 이를 위하여 개정 교육과정에서는 교육 목표에서뿐만 아니라 내용, 교수·학습 방법, 평가에 걸쳐 일관되게 강조하고 있다.

05 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조

국제 학업 성취도 비교 평가에서 우리나라 학생들의 수학 성취도가 전 세계에서 최상위권이면서도 수학에 대한 관심과 흥미가 적고 수학에 대한 자신감이 부족하며 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나는 사실은 학생의 입장에서 뿐만 아니라 국가적으로도 심각한 문제가 아닐 수 없다. 이러한 현실을 개선하기 위하여 수학과 교육과정에서는 수학과 교육목표에서부터 수학에 관심과 흥미를 갖도록 하고, 수학의 가치를 이해하며 수학에 대한 긍정적 태도를 기르도록 할 것을 강조하였다.

06 문서 체제 개선

단계형 수준별 교육과정이 개정됨에 따라 교육과정 문서 체제도 다소 변화하였다.

첫째, '단계' 라는 용어 대신에 '학년', '학기' 라는 용어를 사용하였다. 즉, 1－가 단계와 1－나 단계를 묶어 1학년으로 나타내고, 1－가 단계는 1학년 1학기로 나타내었다.

둘째, 수학과 목표를 제시할 때, 국민 공통 기본 교육 기간 10년에 걸친 총괄 목표 외에도 초등학교, 중학교, 고등학교의 학교급별 목표를 제시하였다. 이것은 학교급별 교육의 목표를 좀 더 구체적으로 제시하는 것이 필요하다는 총론의 방침을 따른 것이다. 한편, 제7차 교육과정에서는 수학과에만 '단계별 목표' 를 제시하였다. 그러나 모든 교과의 교육과정 문서 체제가 일관성을 유지하는 것이 필요하고, '단계별 목표' 와 학습 내용 사이에 중복이 심하다는 의견에 따라 이를 삭제하였다.

셋째, 내용 영역을 20단계로 제시하던 것을 학년 단위로 제시하였다. 학년 단위로 학습 내용을 제시함으로써 교사가 학교와 학생의 여건에 맞게 학습 내용을 탄력적으로 조절하여 수업할 수 있도록 하였다.

넷째, 초등학교와 중·고등학교 내용 영역명을 구분하였다. 제7차 교육과정에서는 국민 공통 기본 교육 기간인 10년 동안에 수학의 계통성을 고려하고 학습 내용의 일관성을 유지하기 위하여 초, 중, 고등학교의 내용 영역명을 통일하여 제시하였다. 그러나 학교급별로 강조하거나 중점적으로 다루어야 할 내용이 약간씩 다르고 각 내용 영역에 속한 내용의 적절성 논란이 심해짐에 따라, 학교급별 학습 내용의 특성을 살리고 학습 내용 간의 연계성을 강화하기 위하여 학교급별로 내용 영역명을 다소 다르게 제시하였다. 이에 따라 초등학교 수학은 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결의 5개 영역으로 구분하여 제시하였고, 중·고등학교 수학은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하의 5개 영역으로 구분하여 제시하였다.

01 성격

(1) 수학의 개관

수학은 수량과 관련된 수학적 사실, 관계, 규칙을 다루며, 공간에서 일어나는 다양한 현상들에 대해 연구하는 분야이다. 수학은 우리 인간의 생활 영역이나 지식의 세계에서 주로 수리적 계산이나 사고, 공간 감각과 직접적인 관련이 있으며, 또한 개인의 생각이나 개념을 정확하고 간결하게 전개, 표현하는 것을 용이하게 해 준다. 여기에서는 이러한 수학의 특성과 가치를 알아보고자 한다.

① 수학의 특성

수학은 추상성, 이상성, 실용성, 논리성과 직관성, 형식성, 일반성과 특수성, 계통성 등의 특성을 가지고 있다(교육부, 1999a).

추상성은 어떤 구체물의 집합에서 이질적인 속성을 제거하고, 동질적인 속성만을 추출하는 추상화 과정과 관련된 것으로, 수학에서 다루는 대상은 대부분 추상화하여 얻어진 개념이라는 점에서 추상성은 수학 교과가 가지는 핵심적 특성이라고 할 수 있다. 이상성은 추상성과 밀접하게 관련된 것으로, 수학적 사고 과정에서 그 사고의 대상인 사물이나 현상에 대하여 사고의 대상이 되는 사물이나 현상을 그 겉모양으로 보는 것이 아니라, 최적의 사고가 가능하도록 본질적인 요소만 고려하여 새로이 바람직한 형태로 단순화시킴으로써 얻게 되는 특성이다.

땅의 넓이나 산의 높이를 구할 때 수학의 이론을 적용하여 측정하는 것과 같이 실제 생활에서 수학이 유용하게 사용되는 점, 다른 교과의 학습을 돕는 기초적인 도구 교과로서의 역할을 수행하는 점은 수학의 실용성을 보여준다.

한편, 전제나 선행 명제로부터 결론이나 후속 명제를 타당하게 이끌어 내는 논리성은 다른 어떤 교과보다 수학 교과에 특징적인 것이다. 그러나 논리적으로 정당화되는 대상은 사실상 직관에 의해서 발견되고, 발명되는 경우가 많다는 점에서 수학에서 직관성도 매우 중요하다. 또한 수학의 개념이나 원리가 추상화의 사고 과정을 통하여 발견되고 추출된 다음, 더욱 발전된 일반성을 가지는 활용 방법을 얻는 과정에서 갖출 필요가 있는 격식인 형식성은 수학적 표현의 엄밀성을 보장하기 위한 장치로서, 수학의 힘을 증대시키고 효율적인 사고를 가능하게 해 주는 특징적인 것이다.

일반성은 하나의 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함하는 집합에 대한 고찰로 확장시키는 일반화의 성질을 가리키는 것으로 수학에서 사용되는 여러 가지 원리와 법칙을 발견(구성)하게 해 준다. 특수성은 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합 또는 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮겨가는 특수화의 성질을 가리키는 것으로, 일반화된 명제를 검증하거나 그 증명 또는 풀이에 대한 실마리를 제공해 주기도 한다.

계통성은 어떤 기초적인 내용을 기반으로 하여 그 기반 위에 다른 내용을 더 첨가함으로써, 발전되고 통합된 새로운 내용을 일관성 있게 이어나가는 것으로, 수학적 개념의 확장과 관련된다. 수학은 어느 교과보다도 계통성이 강한 교과이며, 계통성은 학습 내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지도록 해 준다.

② 수학의 가치

수학의 가치에 대한 논의는 수학을 가르쳐야 하는 이유와 직결되는 것으로 수학 교육의 목표를 설정하고 그 의의를 찾는 바탕이 된다. 수학의 가치로는 다음과 같은 네 가지가 일반적으로 제안되고 있다.

첫째는 수학의 실용적 가치이다. 이는 수학을 배우면 사회 생활을 하는 데 그리고 장차 과학이나

다른 학문을 하는 데 유익하다는 것이다. 수 개념이나 사칙연산 등과 같이 어떤 수학적 지식은 사회 생활을 하는 데 필수적이며, 또 어떤 수학적 지식은 사회 생활에 직접 소용이 되지 않는다 하더라도 다른 학문을 하는 데 필수적이다. 과학 기술의 발달로 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 수학의 중요성이 점점 증대되고 있을 뿐만 아니라 공학, 경제학을 비롯하여, 산업, 금융, 국방, 정보통신, 의학 등 많은 학문 분야에서 수학은 기초적인 학문으로서 중요한 역할을 한다.

둘째는 수학의 도야적 가치이다. 이는 수학을 배우면 우리의 정신 능력을 신장시킬 수 있다는 것이다. 수학을 배우면서 습득한 합리적이고 논리적인 사고력, 추상화 능력, 창의성, 비판적 사고 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등은 수학이 아닌 다른 분야에서도 그 위력을 발휘할 수 있다. 이러한 능력은 수학과 관련이 없는 분야에 진출하는 사람에게도 요구되는 정신능력으로서 수학을 배워야 하는 강력한 이유가 된다.

셋째는 수학의 심미적 가치이다. 이는 수학적 대상도 아름다우며, 수학의 공식이나 방법이 절묘하고 아름답게 적용되는 것을 통해 수학의 아름다움을 느낄 수 있다는 것이다. 학생들 수준에서 수학의 심미적 가치를 쉽게 인식하기는 어렵지만, 많은 수학자들이 수학에서 볼 수 있는 추상화된 아이디어들의 아름다움을 강조하였다. 우주와 자연의 조화로운 질서를 밝혀내는 수학적 개념과 이론들은 그 자체로 아름답다.

넷째는 수학의 문화적 가치이다. 이는 인류가 오래전부터 오늘날까지 구축해 온 수학이라는 지적 문화 유산을 수용하고 다음 세대에 잘 전달하는 것이 가치가 있다는 것이다. 수학은 수많은 사람들의 노력을 거쳐 생동하며 발전해 오면서 각 시대마다 그 사회 발전에 공헌해 왔으며, 현대에도 다방면에 걸쳐 기여하는 바가 큰 인류의 소중한 정신적, 문화적 유산이다. 그러므로 수학을 배우는 것은 곧 인류가 남긴 문화적, 학문적 유산을 계승하여 활용하고 발전시키는 일에 참여하는 셈이 된다.

학교수학이 다루는 내용은 학문으로서의 수학의 수준이나 그 범위와는 차이가 있다. 하지만 수학 교과를 학습함으로써 학습자가 획득하기를 기대하는 것은 수학의 학문적 특성과 가치의 맥락에서 크게 벗어나지 않는다. 수학을 가르치고 배우는 활동 속에서 사용되는 소재와 내용이 무엇이든지 간에 그것을 통해 수학의 특성을 인식하고 그 가치를 느끼는 것이야말로 수학 교육을 통해 달성할 중요한 목적이라고 할 것이다. 그러므로 수학을 가르치는 교사가 먼저 수학이 지닌 독특한 특성과 그 가치를 느끼고, 수업을 통해 그와 같은 것이 학생들에게 전달될 수 있어야 할 것이다.

(2) 수학과 목적

수학과는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다.

(3) 수학 학습의 필요성

수학적 개념의 깊이 있는 이해와 활용, 합리적인 문제해결 능력과 태도는 모든 교과를 성공적으로 학습하는 데 필수적일 뿐만 아니라 개인의 전문적인 능력을 향상시키고 민주 시민으로서 합리적 의사 결정 방법을 습득하는 데에도 필요하다. 또한 수학적 지식과 사고 방법은 오랜 역사를 통해 인간 문명 발전의 지적인 동력의 역할을 해 왔으며, 미래의 지식 기반 정보화 사회를 살아가는 데 필수적이다.

(4) 수학과 교육 내용

초등학교 수학과 교육 내용은 ‘수와 연산’, ‘도형’,

‘측정’, ‘확률과 통계’, ‘규칙성과 문제해결’의 5개 영역으로 구성된다. ‘수와 연산’ 영역에서는 자연수, 분수, 소수의 개념과 사칙계산을, ‘도형’ 영역에서는 평면도형과 입체도형의 개념과 성질을, ‘측정’ 영역에서는 길이, 시간, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피의 개념과 활용을, ‘확률과 통계’ 영역에서는 자료의 정리와 해석, 경우의 수, 확률의 의미를, ‘규칙성과 문제해결’ 영역에서는 규칙 찾기, 비와 비례, 문자의 사용, 간단한 방정식, 정비례와 반비례, 여러 가지 문제해결 방법을 다룬다.

중학교와 고등학교 수학과 교육 내용은 ‘수와 연산’, ‘문자와 식’, ‘함수’, ‘확률과 통계’, ‘기하’의 5개 영역으로 구성된다.

중학교의 경우, ‘수와 연산’ 영역에서는 집합, 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산, 근삿값을, ‘문자와 식’ 영역에서는 다항식의 개념과 사칙계산, 일차방정식과 일차부등식, 연립일차방정식과 연립일차부등식, 이차방정식의 풀이와 활용을, ‘함수’ 영역에서는 함수 개념, 일차함수의 개념과 활용, 이차함수의 개념을, ‘확률과 통계’ 영역에서는 도수분포에 대한 이해와 활용, 확률의 기본 성질, 대푯값과 산포도를, ‘기하’ 영역에서는 기본 도형의 성질에 대한 이해와 증명, 피타고라스의 정리, 삼각비에 대한 이해와 활용을 다룬다.

고등학교의 경우, ‘수와 연산’ 영역에서는 집합의 연산 법칙, 명제의 이해와 활용, 실수의 성질, 복소수의 개념과 사칙계산을, ‘문자와 식’ 영역에서는 다항식의 연산과 활용, 유리식과 무리식의 계산, 이차방정식의 활용, 고차방정식, 연립방정식, 이차부등식, 연립부등식, 절대부등식의 풀이를, ‘함수’ 영역에서는 이차함수의 활용, 유리함수, 무리함수, 삼각함수의 개념과 활용을, ‘확률과 통계’ 영역에서는 순열과 조합의 이해를, ‘기하’ 영역에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동, 부등식의 영역의 이해와 활용을 다룬다.

(5) 수학과 교수 · 학습 방향

수학의 교수 · 학습에서는 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 추상화 단계로 점진적으로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 한다. 또한 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제를 명확히 이해하고 합리적인 해결 계획을 세워 실행하며, 반성을 통하여 풀이 과정을 점검하고 다양하게 활용하는 태도를 기르도록 한다. 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 유용성을 인식하고, 수학 학습의 즐거움을 경험함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지도록 한다.

02 목표

발전된 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

가. 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통하여 수학의 발전된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 문제를 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

(1) 목표 체계표

수학과의 목표는 고등학교 교육 목표를 바탕으로 하고 있고, 고등학교 교육 목표는 교육과정에서 추구하고 있는 인간상을 그 출발점으로 삼고 있다. 수학과 목표는 이런 배경을 지니고 있는 바, 일련의 목표 사이의 위계 관계를 체계화하여 표로 나타내면 다음과 같다.

교육과정이 추구하는 인간상 → **고등학교 교육 목표**

교육과정이 추구하는 인간상

가. 전인적 성장의 기반 위에 개성을 추구하는 사람
나. 기초 능력을 토대로 창의적인 능력을 발휘하는 사람
다. 폭넓은 교양을 바탕으로 진로를 개척하는 사람
라. 우리 문화에 대한 이해의 토대 위에 새로운 가치를 창조하는 사람
마. 민주 시민 의식을 기초로 공동체의 발전에 공헌하는 사람

고등학교 교육 목표

가. 심신이 건강한 조화로운 인격을 형성하고, 성숙한 자아 의식을 가진다.
나. 학문과 생활에 필요한 논리적, 비판적, 창의적 사고력과 태도를 익힌다.
다. 다양한 분야의 지식과 기능을 익혀, 적성과 소질에 맞게 진로를 개척하는 능력을 기른다.
라. 우리의 전통과 문화를 세계 속에서 발전시키려는 태도를 가진다.
마. 국가 공동체의 형성과 발전을 위해 노력하며, 세계 시민으로서의 의식과 태도를 가진다.

국민 공통 기본 교육과정의 수학과의 목표

인지적 영역	지식 이해	여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여	수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.
	기능 적용	수학적 지식과 기능을 활용하여	생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 사고하여 해결할 수 있다.
정의적 영역	태도	수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고	수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

고등학교 수학과의 목표

수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하

(2) 총괄 목표

2006년 개정 수학과 교육과정에서 고등학교 수학과의 목표는 다음과 같은 국민 공통 기본 교육과정 전체에 대한 수학과의 총괄적인 목표와 관련지어 이해되어야 한다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.

2006년 개정 교육과정이 추구하는 인간상을 구현하기 위한 수학 교육의 목표는 크게 두 가지 측면으로 나누어 생각할 수 있다. 하나는 수학적 지식과 기능의 습득 및 그 응용이며, 다른 하나는 수학적 사고력의 신장과 수학적 태도의 함양이다. 이런 의미에서 고등학교 수학과에서는 고등학교 학생들이 가져야 할 기초적인 수학적 지식의 습득을 중요시함과 동시에 이를 토대로 여러 가지 사물의 현상을 수학적으로 표현하고, 사고하고, 처리하는 능력과 수학적 태도의 육성을 그 목표로 하고 있다.

(3) 하위 목표

총괄 목표에 이어 고등학교 수학과의 하위 목표가

인지적 영역과 정의적 영역으로 구분되어 제시되어 있다. 인지적 영역에서는 수학적 지식과 이해, 기능과 적용에 대하여, 정의적 영역에서는 수학적 태도에 관하여 각각 설명하고 있다.

가. 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

나. 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

목표 '가' 항은 수학과의 학습 지도에 있어 지식과 이해에 관한 목표라고 볼 수 있다. 먼저, 일상생활에서 일어나고 관찰되는 여러 현상을 수학적으로 생각하는 활동을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계로부터 구성된 원리, 법칙 등을 학습자가 찾아내어 이해하도록 지도해야 한다는 것이다.

목표 '나' 항은 학습 지도에 있어 기능 · 적용에 관한 목표이다. 이 목표는 수학적 지식과 기능을 바탕으로 여러 가지 생활 문제를 수학적으로 해결할 수 있는 능력을 기르게 하는 것이다.

목표 '다' 항은 태도에 관한 목표라고 할 수 있다. 이 목표는 앞의 목표 '가' 와 '나' 의 달성 없이는 기대할 수 없을 것이며, 역으로 수학에 대한 흥미와 관심 없이 목표 '가' 와 '나' 의 효과적인 달성은 어려울 것이다. 따라서 목표 '다' 는 목표 '가' 와 '나' 항의 지도를 통하여 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가질 수 있도록 하고, 이를 바탕으로 하여 사물의 현상을 합리적으로 생각하여 해결하고자 하는 태도를 육성하도록 지도하자는 것이다.

03 교수 · 학습방법

개정 수학과 교육과정에서 교수 · 학습 방법의 특징은 학습자의 심리, 인지 수준 및 학습 능력을 최대한 고려하여, 이를 학교 현장의 실제 수학 수업에 구현하려는 이른바 학습자 중심의 교수 · 학습의 의지를 강하게 나타내고 있다는 점이다. 즉, 개정 수학과 교육과정의 교수 · 학습은 학습자의 수준에 따른 수준별 학습 적용, 학습 방법의 다양화, 학습자의 능동적 학습 활동 강조, 학습자의 수학 학습에 대한 흥미와 관심의 유발, 학습자의 실제 경험과 관련된 문제해결 강조 등을 강조하고 있다. 이와 관련하여 세부적인 사항을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 교육과정 내용의 지도 방법

① 교육과정에 제시된 내용은 모든 학생이 도달해야 할 성취 기준이므로, 학생의 특성, 학년 간 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 적절히 지도되어야 한다.

② 학년별 내용의 배열 순서가 반드시 교수 · 학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 · 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

(2) 보충 · 심화 학습의 기회 부여

교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.

교육과정에는 기본 내용만 제시하고 있으며, 교육과정상 명시된 기본 내용을 지도한 후 여전히 학습 목표에 제대로 도달하지 못한 학생들에게는 보충 학습의 기회를 제공할 수 있다. 이는 강제적 규정은 아니지만 학교 현장에서는 교육과정에 제시된 기본 내용에 대한 일반적인 이해나 학습이 제대로 이루어지지 못했다고 판단되는 학생들을 위하여 제반 여건이 허락하는 범위 내에서 보충 학습의 기회를 부여할 수 있다.

한편, 교육과정에 제시된 기본 내용을 지도한 후 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 제공할 수 있다. 심화 학습도 교육과정상 명시되어 있지는 않지

만, 기본 학습 내용으로 이미 학습한 내용에 대한 이해와 적용의 폭을 넓히거나 그 내용과 관련하여 수업 자료를 좀 더 풍요롭게 제공하는 방식으로 내용을 상세화 할 수 있다. 그렇지만 심화 학습이 자칫 해당 학년의 내용의 범위나 수준을 벗어나거나 난이도 면에서도 지나치게 어려운 경우는 피해야 할 것이다. 즉, 상위 학년에서 학습할 내용을 미리 도입하거나 그 내용과 관련되어 있는 내용을 다루어서는 안 된다.

(3) 다양한 교수 · 학습 방법의 제공

학생들이 수학 학습의 본연의 목적을 달성하고 교육과정에서 제시하는 기본 학습 내용을 습득하도록 하기 위하여 다양한 교수 · 학습 방법을 제공해야 한다. 수학과 수업에서 적용 가능한 다양한 교수 · 학습 방법과 그 실천을 위한 구체적인 내용은 다음과 같다.

① 수학과 수업에서는 교육 내용과 학생의 특성을 고려하여 발견 학습, 탐구 학습, 협동 학습, 개별 학습, 설명식 교수 등 다양한 교수 · 학습 방법을 활용할 수 있다.

② 수학 수업에서 의미 있는 발문을 하기 위하여 다음 사항에 유의한다.

- 발문은 학생의 인지 발달과 경험을 고려하여 선택하고, 그에 대한 반응을 의미 있게 처리한다.
- 가능하면 열린 형태의 발문을 하여 창의적인 답이 나올 수 있게 한다.

③ 수학적 개념, 원리, 법칙의 교수 · 학습에서는 다음 사항에 유의한다.

- 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 도입한다.
- 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하게 한다.

(4) 수학적 능력의 신장을 위한 교수 · 학습 방법

① 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

- 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다.
- 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

② 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

- 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
- 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통 할 수 있게 한다.
- 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 한다.

③ 문제해결력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

- 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
- 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
- 학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.
- 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
- 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

(5) 수학에 대한 긍정적 태도 신장을 위한 교수 · 학습 방법

수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

① 여러 가지 현상에서 접할 수 있는 수학을 다룸으로써, 수학에 대한 가치를 인식하고 수학의 필요성을 느낄 수 있게 한다.

② 수학에 대한 흥미, 관심, 자신감을 갖도록 학습 동기와 의욕을 유발한다.

(6) 교육 기자재의 활용

수학 교수 · 학습 과정에서 교육기자재의 활용은 다음 사항에 유의한다.

① 교수 · 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.

② 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념 · 원리 · 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 수 있다.

(7) 수준별 수업의 운영

각 학교에서는 학생 개인의 학습 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 수준별 수업을 운영할 수 있다. 수준별 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다.

① 수준별 수업은 학교 상황에 맞게 수준별 집단을 편성하여 운영할 수 있다.

② 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 운영한다.

04 평가

평가는 학생이 특정한 수학 내용을 학습한 후에 치르는 시험 이상의 것이어야 한다. 평가는 교수 · 학습 개선을 위한 피드백을 제공해야 하며, 또는 의미 있는 수학 학습을 뒷받침할 수 있어야 한다. 평가는 교사가 교수학적 결정을 내릴 때 정보를 주고 안내하는 교수 활동의 필수적인 부분이어야 하며, 학생들의 학습을 안내하고 향상시킬 수 있어야 한다.

(1) 평가의 목적

① 수학 학습의 평가는 학생들의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하여 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 교수 활동과 수업 방법을 개선하는 데 활용한다.

② 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 수준을 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

(2) 평가의 방법

① 수학 학습의 평가는 수업의 전개 과정에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등의 적절한 평가 방식을 택하여 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

② 수학 학습의 평가에서는 획일적인 방법을 지양하고 지필평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 통해 수학 교수 · 학습을 향상시킬 수 있게 한다.

(3) 인지적 영역의 평가

인지적 영역에 대한 평가에서는 학생들의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수 · 학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

① 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

② 수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력

③ 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력

④ 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

⑤ 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

⑥ 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(4) 정의적 영역의 평가

정의적 영역에 대한 평가에서는 학생들의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 학생들의 수학에 대한 바람직한 가치관이나 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감 등의 정도를 파악한다.

다음의 표는 각각의 하위 영역에서 활용할 수 있는 세부 항목들이며, 학교 현장에서 이를 직접적으로 활용하는 교사는 아래의 세부 항목들을 적절히 선택하여 활용할 수 있다. 각각의 항목에 대해 교사는 '전혀 그렇지 않다', '그렇지 않다', '보통이다', '그렇다', '매우 그렇다'와 같은 5가지 척도로 평가할 수 있으며, 목적에 맞게 척도를 다양하게 설정할 수도 있다.

정의적 영역	세부 항목
수학에 대한 흥미와 호기심	수학을 하는 것을 즐거워한다. 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다. 수학 수업 시간을 기다린다. 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다. 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.
수학에 대한 자신감	수학 공부에 자신감을 가지고 있다. 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다. 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다. 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.
수학에 대한 불안	수학 수업이 어려울까봐 걱정한다. 수학 성적이 나빠질까봐 걱정한다. 수학 문제를 풀 때 긴장한다.
수학의 유용성 인식	수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다. 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다. 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다. 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.
과제 집착력과 의지	수학 공부를 열심히 한다. 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다. 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다. 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.
창의적 사고	다른 사람의 방법을 그대로 따라하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다. 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다. 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다. 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.
수학 수업에의 참여	수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다. 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다. 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다. 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.

(5) 평가에서 공학적 도구의 활용

수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용에 따라 학생들에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

5. 제7차 교육과정과 2006년 개정 교육과정의 내용 비교

2006년 개정 수학과 교육과정은 앞의 개정의 필요성, 개정의 중점에서 언급한 바와 같이 수준별 교육과정으로 구성, 운영하도록 하였으며 특히, 학습 내용이 상 · 하위 학년으로 이동된 부분이 있다.

적분과 통계의 내용에 대하여 제7차 교육과정과 2006년 개정 수학과 교육과정을 비교 · 정리하면 다음과 같다.

제7차 교육과정		2006년 개정 교육과정	비고
〔수학 Ⅱ〕 **(다) 다항함수의 적분법** **1** 부정적분 ① 부정적분의 뜻을 안다. ② 실수배, 합, 차의 부정적분을 구할 수 있다.	〔미분과 적분〕 **(라) 적분법** **1** 부정적분 ① 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있다. ② 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있다. ③ 지수함수와 로그함수의 부정적분을 구할 수 있다. ④ 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ⑤ 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	**(가) 적분법** **1** 부정적분 ① 부정적분의 뜻을 안다. ② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. ③ 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있다. ④ 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있다. ⑤ 지수함수와 로그함수의 부정적분을 구할 수 있다. ⑥ 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ⑦ 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	• 수학 Ⅱ, 미분과 적분에 있던 적분법이 하나의 단원으로 통합 • 적분과 관련된 실생활의 사례나 타 학문 분야의 예를 다양하게 제시함으로써 적분의 유용성을 인식할 수 있게 함
2 정적분 ① 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. ② 정적분의 뜻을 안다. ③ 정적분과 부정적분의 관계를 이해한다. ④ 정적분의 기본 정리를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.	**2** 정적분 ① 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.	**2** 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. ② 정적분의 뜻을 안다. ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. ④ 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.	

3 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. ② 회전체의 부피를 구할 수 있다. ③ 속도와 거리에 관한 문제에 활용할 수 있다.	**3** 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다. ③ 속도와 거리에 관한 문제에 활용할 수 있다.	**3** 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다. ③ 회전체의 부피를 구할 수 있다. ④ 정적분을 이용하여 속도와 거리에 관한 문제를 해결할 수 있다.	
용어와 기호 | 부정적분, 피적분함수, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 위끝, 아래끝, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$	용어와 기호 | 치환적분법, 부분적분법	용어와 기호 | 부정적분, 피적분함수, 적분상수, 치환적분법, 부분적분법, 구분구적법, 정적분, 위끝, 아래끝, 정적분의 기본 정리, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$	• 미적분과 통계 기본에는 용어 원시함수가 있으나 적분과 통계에는 없음 • 추가된 용어 정적분의 기본 정리
〔수1-(3) 확률과 통계〕 **(가) 순열과 조합** **1** 경우의 수 ① 합의 법칙, 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.		**(나) 순열과 조합**	• 수학Ⅰ에 있던 순열과 조합에서 경우의 수와 간단한 순열, 조합은 고1 수학으로 이동하고 복잡한 순열과 조합이 적분과 통계로 이동
2 순열 ① 순열의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. ② 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.		**1** 순열과 조합 ① 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. ② 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.	• 중복조합에 대한 내용이 추가
3 조합 ① 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.			
4 이항정리 ① 이항정리를 이해한다. ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.		**2** 이항정리 ① 이항정리를 이해한다. ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.	• 이항정리를 확장한 다항정리는 다루지 않음

용어와 기호 | 순열, 계승, 원순열, 중복순열, 조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\mathrm{C}_r$, ${}_n\Pi_r$	용어와 기호 | 원순열, 중복순열, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\Pi_r$, ${}_n\mathrm{H}_r$	• 추가된 용어 및 기호 중복조합, ${}_n\mathrm{H}_r$
(나) 확률	**(다) 확률**	
1 확률의 뜻	**1** 확률의 뜻과 활용	• 소단원이 '확률의 뜻과 활용'과 '조건부확률'로 분리
① 통계적확률과 수학적확률의 뜻을 알고, 그 관계를 이해한다.	① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.	
② 확률의 기본 성질을 이해한다.	② 확률의 기본 성질을 이해한다.	
2 확률의 계산		
① 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	
② 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.	④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.	
	2 조건부확률	
③ 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	
④ 사건의 독립과 종속의 뜻을 이해한다.	② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.	
⑤ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	• 확률의 곱셈정리는 조건부확률과 관련지어 간단하게 다룸
⑥ 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.		• 독립시행의 확률에 대한 내용이 확률의 곱셈정리에 포함
용어와 기호 | 시행, 사건, 확률, 통계적확률, 수학적확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B\|A)$	용어와 기호 | 시행, 통계적 확률, 수학적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B\|A)$	• 삭제된 용어 사건, 확률 • 통계적확률, 수학적확률의 띄어쓰기가 바뀜
(다) 통계	**(라) 통계**	
1 확률분포	**1** 확률분포	
① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.	① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.	
② 이산확률변수의 기대값(평균)과 표준편차의 뜻을 이해하고, 이를 구할 수 있다.	② 이산확률변수의 뜻을 알고, 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.	• 이산확률변수와 연속확률변수에 대한 내용이 분리
③ 이항분포의 뜻을 이해하고, 이항분포에서 평균과 표준편차를 구할 수 있다.	③ 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.	
	④ 연속확률변수의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.	• 연속확률변수에 대한 평균과 표준편차를 구하는 내용이 추가
④ 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.	⑤ 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.	

2 통계적 추정 ① 모집단과 표본의 뜻을 안다. ② 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다. ③ 모평균을 추정할 수 있다.	**2** 통계적 추정 ① 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다. ② 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다. ③ 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.	• 표본평균과 모평균의 관계는 간단한 예를 통하여 이해하게 함 • 표본분산은 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 을 이용하여 구함 • 모평균을 추정한 후, 그 결과를 해석하는 내용이 추가 • 표본비율과 모비율에 대한 내용이 추가
용어와 기호 | 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 확률밀도함수, 이항분포, 큰수의 법칙, 정규분포, 정규분포곡선, 표준화, 표준정규분포, 표본, 전수조사, 표본조사, 모집단, 임의추출, 모평균, 모표준편차, 표본평균, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$	용어와 기호 | 확률변수, 이산확률변수, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준화, 표준정규분포, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 모비율, 표본비율, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$, $\overline{X}$, $\hat{p}$	• 추가된 용어 및 기호 확률질량함수, 연속확률변수, 기댓값, 모분산, 표본분산, 모비율, 표본비율, $\mathrm{N}(0,\ 1)$, $\overline{X}$, $\hat{p}$ • 삭제된 용어 정규분포곡선

〈수학 교사에게 필요한 추천 자료 및 도서 목록〉

교육부(1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 1997-15호. 교육부.

교육부(1999a). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술 · 가정 -. 교육부.

교육부(1999a). 중학교 교육과정 해설(Ⅰ) - 총론 -. 교육부.

교육인적자원부(2006). 수학과 교육과정 교육인적자원부 고시 제2006-75호 수정 고시에 따른 보도자료. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2007a). '2007년 개정 교육과정' 개요. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2007b). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2007-79호. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2008). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술 · 가정 -. 교육과학기술부.

구광조 외 5명(1988). 수학과교육론, 서울: 갑을출판사.

문교부(1980). 한국 교육 30년. 문교부.

박선화 외 7명(2005). 수준별 수업 활성화 방안 연구. 한국교육과정평가원.

박선화 외 14명(2006). 수학과 교육과정 개정 시안 수정 · 보완 연구. 한국교육과정평가원.

박순경 외 9명(2007). 초 · 중학교 교육과정 해설-총론-. 2007년 개정 교육과정 해설 교육인적자원부 위탁과제 답신 보고서. 한국교육과정평가원

신성균 외 6명(2005). 수학과 교육과정 개선 방안 연구. 한국교육과정평가원.

우정호(1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부.

이미경 외 6명(2004a). PISA 2003 결과 분석 연구 - 수학적 소양, 읽기 소양, 과학적 소양 수준 및 배경 변인 분석- 한국교육과정평가원.

이미경 외 6명(2004b). PISA 2003 공개문항 분석 자료집. 한국교육과정평가원.

최승현(1999). 수학 교과에서의 자기평가. 학교수학, 1(1), 123-133.

황혜정 외 5명(2001). 수학교육학신론. 서울: 문음사.

Brousseau, G.(1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kruwer Academic Publishers

Burton, G. M.(1985). Writing as a way of knowing in mathematics education class. Arithmetic Teacher, 33(4), 40-45.

Davis, P. J. & Hersh, R.(1981). The Mathematical Experience. 양영오 · 허민(공역)(1995). 수학적 경험. 경문사.

Freudenthal, H.(1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kennedy, L. M., Tipps, S., Johnson, A. (2004). Guiding children's learning of mathematics. Belmont: Wadsworth.

Kenny, P. A., & Silver, E. A. (1983). Student self-assessment in mathematics. In N. L. Webb & A. F. Coxford (Eds.), Assessment in the mathematics classroom: 1993 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics, 류희찬 외 5명(공역)(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. NCTM.

Ⅴ. 교과서와 익힘책의 편찬 방향 및 구성

1. 교과서의 편찬 방향

2006년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 기본적인 수학적 지식과 기능을 습득하여 논리적으로 사고하고, 사회나 자연의 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 키우며, 수학에 대한 긍정적 태도를 갖게 하는데 중점을 두어 교과서를 저술하였다. 특히, 익힘책과 연계를 긴밀히 하여 학교 교육 체계에 적합하도록 중단원 중심으로 저술하였으며, 학습자의 사고력, 탐구력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 저술하였다. 교과서의 편찬 방향은 다음과 같다.

가. 2006년 개정 교육과정을 충실히 반영하였다.

나. 학생들의 발달 수준을 고려하여 내용을 이해하기 쉽게 구성하였다.

다. 수학적 개념의 이해와 기능의 습득을 바탕으로 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합하도록 하였다.

라. 수학적 지식과 방법을 통하여 생활 주변 현상, 자연 현상, 사회 현상 등을 이해하고 다양한 문제를 해결함으로써, 수학의 가치를 이해하고 수학에 대한 긍정적 태도를 기르는 데 적합하도록 하였다.

마. 적절한 편집과 디자인을 활용하여 학습 효과를 높이도록 하였다.

2. 교과서의 구성과 활용 방법

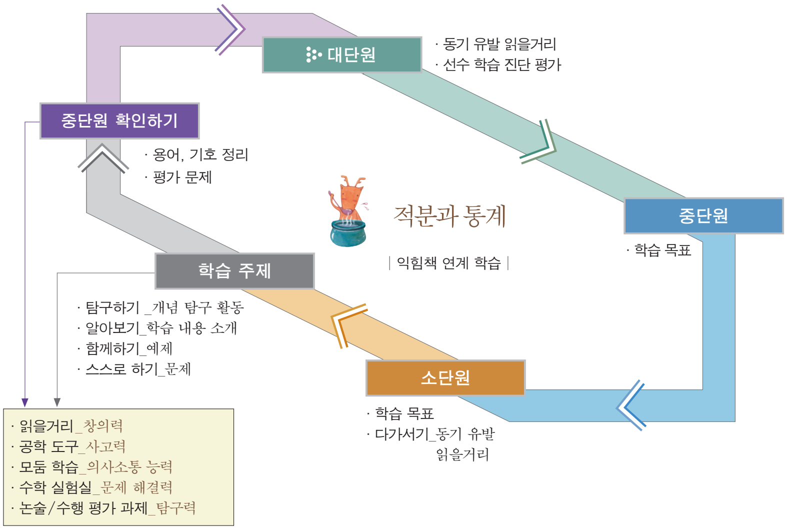
1) 교과서의 구성 체제

(1) 학습 주제의 연계성, 특성, 분량 등을 고려하여 교육과정에 제시된 영역별 내용을 분리하거나 통합하여 단원을 구성하고 배열하였다.

(2) 내용을 쉽게 이해할 수 있도록 충분한 설명을 제공하고, 예제, 문제 등을 적절히 제시하였다.

(3) 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합한 소재, 문제 등을 고르게 실었다.

2) 교과서의 단원 구성

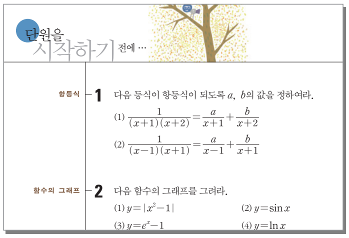


3) 교과서의 활용 방법

(1) 단원 도입 및 동기유발

단원을 시작하기 전에

본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.

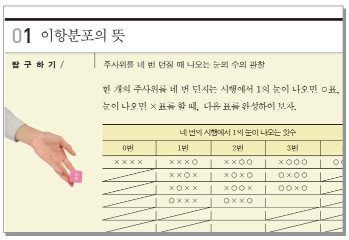


다가서기

소단원 학습에 필요한 개념을 사진, 만화, 읽기 자료 등으로 표현하였다.

탐구하기

소주제 학습의 실마리가 되는 내용을 실생활 또는 선수 학습에서 찾아보았다.



(2) 내용 전개

알아보기_ 본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.

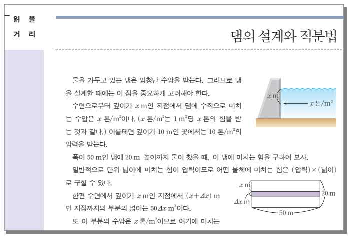
함께하기_ 대표적인 문제를 해결하여 학습 내용을 정리하고 풀이 방법을 익히도록 하였다.

스스로 하기_ 스스로 문제를 해결하고 학습 내용을 점검할 수 있도록 하였다.
더 많은 문제를 풀어 보며 학습 내용을 확인할 수 있도록 익힘책과 연계하였다.

(3) 수학적 가치 함양

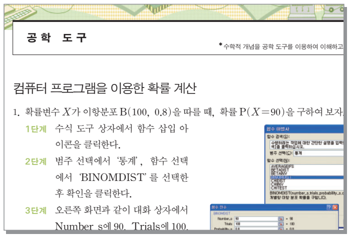
읽을거리

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.



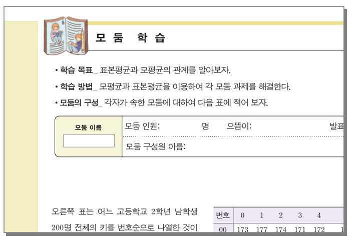
공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.



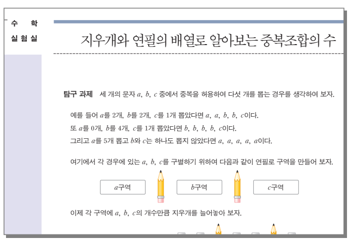
모둠 학습

주어진 주제에 대한 모둠 학습을 통하여 의사소통 능력을 향상시키고, 협동심을 기를 수 있도록 하였다.



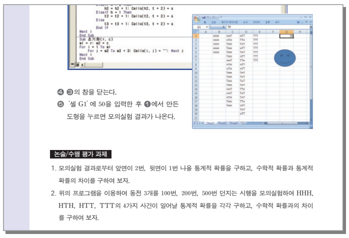
수학 실험실

실생활에서 찾을 수 있는 다양한 소재로 문제해결력을 기를 수 있도록 하였다.



논술/수행평가 과제

학습 내용의 이해를 바탕으로 조사, 분석, 관찰, 발표 등의 활동을 통하여 탐구력을 기를 수 있도록 하였다.



```
        h2 = h2 + 1: Cells(h2, t + 2) = s
    ElseIf h = 1 Then
        t2 = t2 + 1: Cells(t2, t + 2) = s
    Else
        t3 = t3 + 1: Cells(t3, t + 2) = s
    End If
Next i
End Sub
Sub 초기화(r, c)
m1 = r: m2 = c
For i = 1 To m1
    For j = m2 To m2 + 3: Cells(i, j) = "": Next j
Next i
End Sub
```

④ ③의 창을 닫는다.
⑤ '셀 G1' 에 50을 입력한 후 ①에서 만든 도형을 누르면 모의실험 결과가 나온다.

논술/수행 평가 과제

1. 모의실험 결과로부터 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나올 통계적 확률을 구하고, 수학적 확률과 통계적 확률의 차이를 구하여 보자.
2. 위의 프로그램을 이용하여 동전 3개를 100번, 200번, 500번 던지는 시행을 모의실험하여 HHH, HTH, HTT, TTT의 4가지 사건이 일어날 통계적 확률을 각각 구하고, 수학적 확률과의 차이를 구하여 보자.

3. 익힘책의 편찬 방향

2006년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 학생들의 적성과 능력에 맞춘 자기주도적 학습에 중점을 두어 익힘책을 저술하였다. 특히, 교과서와 연계를 긴밀히 하여 다양한 형태의 학습이 가능하도록 하였으며, 학습자의 사고력, 탐구력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 저술하였다. 익힘책의 편찬 방향은 다음과 같다.

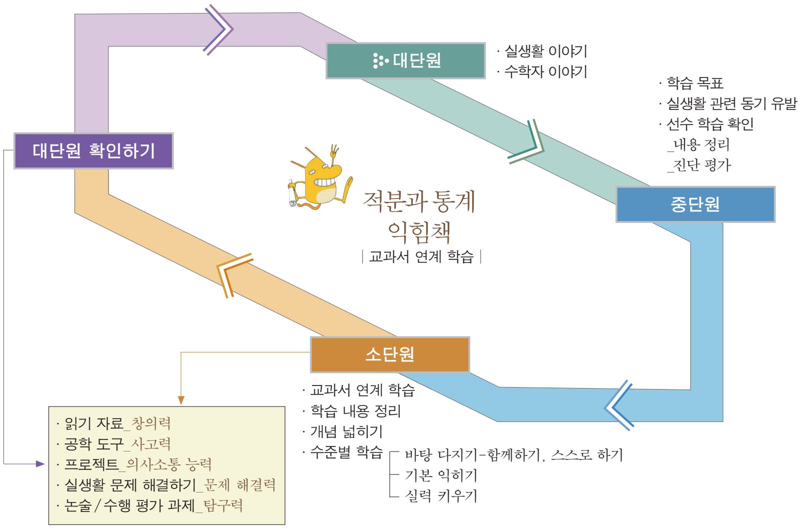
가. 2006년 개정 교육과정을 충실히 반영하였다.
나. 교과서에서 습득한 지식과 기능을 적절히 활용할 수 있도록 하였다.
다. 내용을 이해하기 쉽게 구성하여 학생들의 자기주도적 학습이 가능하도록 하였다.
라. 학생의 능력과 수준에 따른 수준별 교수 · 학습이 가능하도록 하였다.
마. 수학적 개념의 이해와 기능의 습득을 바탕으로 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합하도록 하였다.
바. 수학적 지식과 방법을 통하여 생활 주변 현상, 자연 현상, 사회 현상 등을 이해하고 다양한 문제를 해결함으로써, 수학의 가치를 이해하고 수학에 대한 긍정적인 태도를 기르는 데 적합하도록 하였다.
사. 적절한 편집과 디자인을 활용하여 학습 효과를 높이도록 하였다.

4. 익힘책의 구성과 활용 방법

1) 익힘책의 구성 체제

(1) 교과서의 내용과 유기적으로 연계하였고, 학생의 능력과 수준에 따라 수준별 교수 · 학습이 가능하도록 구성하였다.
(2) 수학적 탐구, 수학적 개념과 기능의 이해와 습득, 추론, 의사소통, 문제해결 등의 수학적 활동에 대한 반복 학습과 심화 학습의 기회를 제공하여 자기주도적 학습이 가능하도록 하였다.
(3) 단원의 도입 부분에서는 그 단원을 학습하는 데 필요한 선수 학습 내용을 제시하였고, 역사적 배경, 여러 가지 현상 등에 대한 읽기 자료를 적절히 소개하였다.
(4) 다양한 유형 및 난이도의 평가 문항을 제시하고, 그 평가 결과를 토대로 교수 · 학습을 향상시킬 수 있도록 하였다.
(5) 개별 학습이나 협력 학습을 통해 해결할 수 있는 프로젝트형 과제나 토론 과제를 제시하였다.

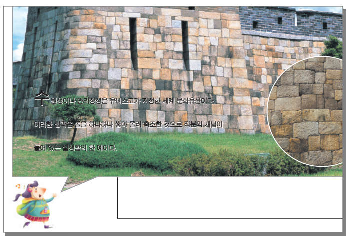
2) 익힘책의 단원 구성



(1) 단원도입 및 선수학습

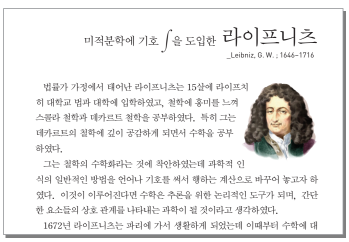
실생활 이야기

학습의 실마리가 되는 생활소재를 만화 및 사진으로 구성하여 학습 주제에 쉽고 재미있게 다가서도록 하였다.



수학자 이야기

대단원 학습에 관련된 수학자의 업적과 일화를 소개하여 학습의 흥미를 높이도록 하였다.


미적분학에 기호 $\int$을 도입한 라이프니츠
_Leibniz, G. W. ; 1646~1716

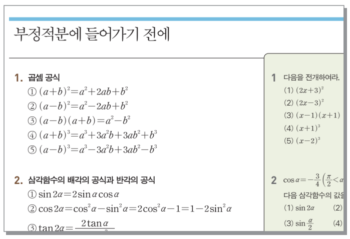
법률가 가정에서 태어난 라이프니츠는 15살에 라이프치히 대학교 법과 대학에 입학하였고, 철학에 흥미를 느껴 스콜라 철학과 데카르트 철학을 공부하였다. 특히 그는 데카르트의 철학에 깊이 공감하게 되면서 수학을 공부하였다.

그는 철학의 수학화라는 것에 착안하였는데 과학적 인식의 일반적인 방법을 언어나 기호를 써서 행하는 계산으로 바꾸어 놓고자 하였다. 이것이 이루어진다면 수학은 추론을 위한 논리적인 도구가 되며, 간단한 요소들의 상호 관계를 나타내는 과학이 될 것이라고 생각하였다.

1672년 라이프니츠는 파리에 가서 생활하게 되었는데 이때부터 수학에 대

~에 들어가기 전에

중단원 학습에 필요한 선수 학습의 내용 정리와 함께 진단 평가 문항을 제시하였다.


부정적분에 들어가기 전에

1. 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
③ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
④ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
⑤ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2. 삼각함수의 배각의 공식과 반각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{}$

1 다음을 전개하여라.
(1) $(2x+3)^2$
(2) $(2x-3)^2$
(3) $(x-1)(x+1)$
(4) $(x+1)^3$
(5) $(x-2)^3$

2 $\cos\alpha=-\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha\right.$
다음 삼각함수의 값
(1) $\sin 2\alpha$ (2)
(3) $\sin\frac{\alpha}{2}$ (4)

(2) 교과서와 연계된 학습

학습 내용 정리_ 교과서에서 익힌 학습 내용을 정리하였으며, □ 채우기를 통하여 보다 효율적으로 습득하도록 하였다.
내용 정리가 부족한 학생은 개념을 다시 확인할 수 있도록 교과서와 연계하였다.

개념 넓히기_ 교과서에서 다룬 개념, 방법 등을 깊이 있게 설명하고 사고력을 넓혀 심화학습이 가능하도록 하였다.

(3) 자기 주도적 학습 방법

바탕 다지기_ 함께하기(예제)와 스스로 하기(유제)를 제시하여 기초적인 학습 내용을 확인하도록 하였으며 보충학습이 가능하도록 하였다.

기본 익히기_ 기본적인 학습 내용을 확인하는 문제를 제시하였으며 오류 유형을 소개하였다.

실력 키우기_ 학습 내용을 응용, 활용할 수 있는 문제를 제시하여 심화학습이 가능하도록 하였으며, 또 오류 유형을 소개하였다.

⑷ 수학적 가치 함양

읽기 자료

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.


읽기 자료

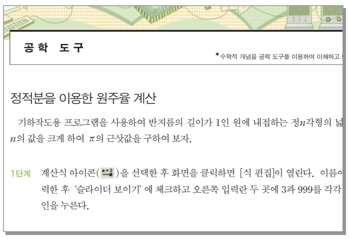
우리나라의 전통 주사위 목제주령구

경주 안압지에서 출토된 '목제주령구'라는 주사위는 보통 우리가 보아 온 6면체가 아니라 특이하게 14면체로 되어 있다. 이 주사위는 정사각형 모양의 면 6개와 육각형 모양의 면 8개로 이루어져 있다.

주사위의 각 면에는 금성작무(禁聲作舞, 소리내지 않고 춤추기), 농면공과(弄面孔過, 얼굴을 간질여도 꼼짝하지 않기), 임의청가(任意請歌, 누구에게나 마음대로 노래시키기), 월경일곡(月鏡一曲, 월경 한 곡조 부르기), 공영시과(空詠詩過, 시 한 수 읊기) 등과 같이 놀이와

공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.


공 학 도 구

•수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고

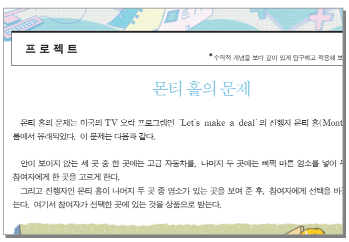
정적분을 이용한 원주율 계산

기하작도용 프로그램을 사용하여 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정n각형의 넓 n의 값을 크게 하여 π의 근삿값을 구하여 보자.

1단계 계산식 아이콘( )을 선택한 후 화면을 클릭하면 [식 편집]이 열린다. 이름어 력한 후 '슬라이더 보이기'에 체크하고 오른쪽 입력란 두 곳에 3과 999를 각각 인을 누른다.

프로젝트

수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용하는 문제로서, 다양한 방법으로 학습 내용을 활용할 수 있도록 하였다.


프 로 젝 트

•수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보

몬티 홀의 문제

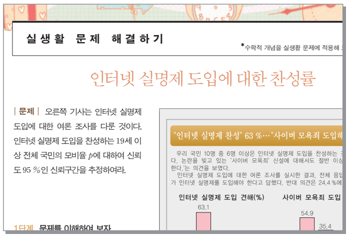
몬티 홀의 문제는 미국의 TV 오락 프로그램인 'Let's make a deal'의 진행자 몬티 홀(Mont 름에서 유래되었다. 이 문제는 다음과 같다.

안이 보이지 않는 세 곳 중 한 곳에는 고급 자동차를, 나머지 두 곳에는 삐쩍 마른 염소를 넣어 참여자에게 한 곳을 고르게 한다.

그리고 진행자인 몬티 홀이 나머지 두 곳 중 염소가 있는 곳을 보여 준 후, 참여자에게 선택을 바 는다. 여기서 참여자가 선택한 곳에 있는 것을 상품으로 받는다.

실생활 문제 해결하기

문제해결 전략을 활용하여 실생활의 문제해결력을 기르도록 하였다.


실 생 활 문 제 해 결 하 기

•수학적 개념을 실생활 문제에 적용해

인터넷 실명제 도입에 대한 찬성률

| 문제 | 오른쪽 기사는 인터넷 실명제 도입에 대한 여론 조사를 다룬 것이다. 인터넷 실명제 도입을 찬성하는 19세 이상 전체 국민의 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 추정하여라.

"인터넷 실명제 찬성" 63 %…"사이버 모욕죄 도입

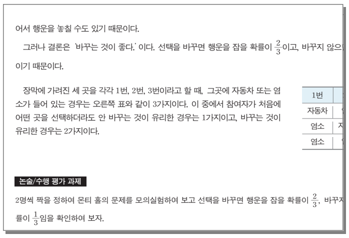
인터넷 실명제 도입 견해(%) 사이버 모욕죄 도입

63.1 54.9 35.4

1단계 문제를 이해하여 보자

논술/수행평가 과제

학습 내용을 바탕으로 여러 가지 문제해결 상황을 제시하고 해결해 보도록 하였다.


어서 행운을 놓칠 수도 있기 때문이다.

그러나 결론은 '바꾸는 것이 좋다.'이다. 선택을 바꾸면 행운을 잡을 확률이 $\frac{2}{3}$이고, 바꾸지 않으 이기 때문이다.

장막에 가려진 세 곳을 각각 1번, 2번, 3번이라고 할 때, 그곳에 자동차 또는 염소가 들어 있는 경우는 오른쪽 표와 같이 3가지이다. 이 중에서 참여자가 처음에 어떤 곳을 선택하더라도 안 바꾸는 것이 유리한 경우는 1가지이고, 바꾸는 것이 유리한 경우는 2가지이다.

1번
자동차
염소
염소

논술/수행 평가 과제

2명씩 짝을 정하여 몬티 홀의 문제를 모의실험하여 보고 선택을 바꾸면 행운을 잡을 확률이 $\frac{2}{3}$, 바꾸지 률이 $\frac{1}{3}$임을 확인하여 보자.

⑸ 학습 평가

대단원 확인하기

대단원 학습의 마무리로써 문항별로 난이도와 계산, 이해, 추론 등의 수학적 능력 항목을 제시하여 학습 전략을 스스로 찾아가도록 하였다.

정기고사 방식의 평가

선다형, 단답형, 서술형 등의 다양한 평가 문항을 수록하고, 또 채점 기준을 제시하여 자율 학습에 도움이 되도록 하였다.

 계산기를 활용할 수 있는 문제이다.

 컴퓨터를 활용할 수 있는 문제이다.

Ⅵ. 지도 계획 및 교수 · 학습 지도안 예시

1. 적분과 통계 1학기 대단원별 지도 계획

적분과 통계에 배정된 1학기 수업 시간 수인 102시간(주당 6시간×17주)을 기준으로 익힘책을 포함하여 대단원별 지도 계획을 작성한 것이다.

대단원	중단원	교과서 쪽	시간 배당	차시
Ⅰ 적분법	1. 부정적분	8~28	12	1~12
	2. 정적분	29~50	13	13~25
	3. 정적분의 활용	51~73	14	26~39
	소계		39	
Ⅱ 순열과 조합	1. 순열, 조합과 이항정리	74~93	12	40~51
	소계		12	
Ⅲ 확률	1. 확률의 뜻과 활용	94~110	11	52~62
	2. 조건부확률	111~119	7	63~69
	소계		18	
Ⅳ 통계	1. 확률분포	120~156	20	70~89
	2. 통계적 추정	157~179	13	90~102
	소계		33	
합계			102	

2. 적분과 통계 1학기 소단원별 지도 계획

적분과 통계에 배정된 1학기 수업 시간 수인 102시간(주당 6시간×17주)을 기준으로 익힘책을 포함하여 소단원별 지도 계획을 작성한 것이다.

대단원	중단원	소단원	지도 내용	용어 및 기호	교과서 쪽	시간 배당
Ⅰ 적분법	1. 부정적분	1. 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분	부정적분의 뜻을 알게 한다. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알게 하고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다. 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.	부정적분, 피적분함수, 적분상수, 치환적분법, 부분적분법, $\int f(x)dx$	8~20	6
		2. 치환적분법과 부분적분법	치환적분법을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다. 부분적분법을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.		21~27	5
		중단원 확인하기			28	1
	2. 정적분	1. 정적분의 뜻과 성질	구분구적법을 이해하게 하고, 이를 활용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있게 한다. 정적분의 뜻을 알게 한다. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하게 하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다. 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.	구분구적법, 정적분, 아래끝, 위끝, 정적분의 기본 정리, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$	29~43	8
		2. 정적분의 치환적분법과 부분적분법	정적분의 치환적분법을 이해하게 한다. 정적분의 부분적분법을 이해하게 한다.		44~49	4
		중단원 확인하기			50	1
	3. 정적분의 활용	1. 도형의 넓이	곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.		51~58	4
		2. 도형의 부피	입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다. 회전체의 부피를 구할 수 있게 한다.		59~64	4
		3. 속도와 거리	정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.		65~72	5
		중단원 확인하기			73	1
Ⅱ 순열과 조합	1. 순열, 조합과 이항정리	1. 중복순열과 원순열	중복순열, 원순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하게 하고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.	중복순열, 원순열, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\Pi_r$, ${}_n\mathrm{H}_r$	74~82	4
		2. 중복조합	중복조합의 뜻을 알게 하고, 그 조합의 수를 구할 수 있게 한다.		83~86	3
		3. 이항정리	이항정리의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.		87~92	4
		중단원 확인하기			93	1

Ⅲ 확률	1. 확률의 뜻과 활용	1. 확률의 뜻과 기본 성질	시행의 뜻을 이해하게 한다. 수학적 확률과 통계적 확률의 의미와 그 관계를 이해하게 한다. 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.	시행, 수학적 확률, 통계적 확률, 배반사건, 여사건, $\mathrm{P}(A)$	94～105	6
		2. 확률의 계산과 활용	배반사건의 뜻을 알게 한다. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다. 여사건의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.		106～109	4
		중단원 확인하기			110	1
	2. 조건부확률	1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리	조건부확률의 뜻을 알게 하고, 이를 구할 수 있게 한다. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하게 한다. 독립시행의 뜻을 알게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.	조건부확률, 독립, 종속, 독립시행, $\mathrm{P}(B\mid A)$	111～118	6
		중단원 확인하기			119	1
Ⅳ 통계	1. 확률분포	1. 확률변수와 확률분포	확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다. 이산확률변수의 뜻과 확률질량함수의 성질을 알게 한다. 연속확률변수의 뜻과 확률밀도함수의 성질을 알게 한다.	확률변수, 이산확률변수, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준정규분포, 표준화, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$	120～130	5
		2. 평균과 표준편차	이산확률변수의 기댓값(평균)과 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다. 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.		131～139	4
		3. 이항분포	이항분포의 뜻을 알게 하고, 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.		140～146	4
		4. 정규분포	정규분포의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다. 표준정규분포의 뜻을 알게 하고, 표준정규분포표를 활용할 수 있게 한다.		147～155	6
		중단원 확인하기			156	1
	2. 통계적 추정	1. 표본조사와 표본평균의 분포	모집단과 표본의 뜻을 알게 한다. 표본평균과 모평균의 관계를 이해하게 한다.	모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, 모비율, 표본비율, $\overline{X}$, $\hat{p}$	157～167	5
		2. 모평균과 모비율의 추정	모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다. 표본비율과 모비율의 관계를 이해하게 한다. 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.		168～178	7
		중단원 확인하기			179	1
합계						102

3. 교수 · 학습 지도안 예시

01 단원명

(1) 대단원: Ⅰ 적분법

(2) 중단원: Ⅰ－1. 부정적분

(3) 소단원: Ⅰ－1－2. 치환적분법과 부분적분법

(4) 수업내용: 01 치환적분법

02 지도 계획

(1) 지도의 목표

① 치환적분법의 필요성을 알게 하고, 그 공식을 유도할 수 있게 한다.

② 치환적분법을 활용하여 여러 가지 부정적분을 구할 수 있게 한다.

(2) 지도상의 유의점

① $x=g(t)$에 의하여 변수 x를 변수 t로 치환하여 적분을 한 후 변수 t를 다시 원래의 변수 x로 치환하는 것을 잊지 않도록 지도한다.

② 치환적분을 적절하게 활용하도록 지도하되 지나치게 어렵고 복잡한 부정적분에 몰두하지 않도록 한다.

(3) 지도과정

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동: 교사	교수 · 학습 활동: 학생	유의점 및 자료	시간
도입	전시 학습 내용 확인	• 인사 및 출석 확인 • 전 시간에 학습한 내용 확인 [부정적분의 뜻] 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$ 일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분 또는 원시함수라 하고 기호로 $\int f(x)dx$ 와 같이 나타낸다. [부정적분의 성질] 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수) $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$ [합성함수의 미분법] 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며, 그 도함수는 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))\times g'(x)$ 이다.	• 인사 • 전시 학습 내용에 대한 질문에 답한다.	교과서 익힘책 색분필	
	본시 학습 목표 제시	• 이번 시간에는 합성함수의 미분법과 역의 관계에 있는 치환적분법에 대하여 알아보자.	• 본시 학습 목표를 주시한다.		5분

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
전개	질문	• $\{(x+1)^3\}'$는 무엇인가? • 미분과 부정적분은 어떤 관계가 있는가? • $\int 3(x+1)^2 dx$는 무엇인가?	• 질문에 답한다. '$3(x+1)^2$입니다.' '서로 역의 관계가 있습니다.' '$(x+1)^3+C$입니다.'		
	탐구하기	• 다음 부정적분을 구하여 보자. 1. $\int(2x+1)^2 dx$ 무엇을 미분하면 $(2x+1)^2$이 될까? 2. $\int(2x+1)^3 dx$ 무엇을 미분하면 $(2x+1)^3$이 될까?	• 질문에 답한다.		
	알아보기	• 치환적분법에 대하여 알아보고, 간단한 식을 치환하여 부정적분을 구하여 보자. 부정적분의 성질만을 이용하여 $\int(2x+1)^{10}dx$와 같은 부정적분을 구하는 것은 어렵다. 이와 같은 경우에는 적분하려는 식의 일부 또는 전체를 새로운 변수로 바꾸어 놓고 적분하면 편리하다. 부정적분 $F(x)=\int f(x)dx$에서 $x=g(t)$라고 하면 $F(x)=F(g(t))$이고 이것을 합성함수의 미분법에 의하여 t에 대하여 미분하면 $$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$ 따라서 $$F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$$ 이다. 그런데 $$F(x)=\int f(x)dx$$ 이므로 $$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$ 가 성립한다. 이와 같이 변수 x를 t의 함수 $g(t)$로 바꾸어 적분하는 방법을 치환적분법이라 한다. 그런데 위의 치환적분법에서 x와 t를 바꿔보면 $$\int f(t)dt=\int f(g(x))g'(x)dx$$ 즉 $g(x)=t$일 때, $$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$ 인 관계가 성립함을 알 수 있게 한다. 이 관계를 이용하면 다음과 같은 부정적분 $\int(2x+1)^{10}dx$를 쉽게 구할 수 있다. $2x+1=g(x)=t$라 하면	• 설명을 들으며 질문에 답한다.		

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동 교사	교수 · 학습 활동 학생	유의점 및 자료	시간
		$\frac{d}{dx}t=g'(x)=2$이므로 $\int(2x+1)^{10}dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{10}\cdot 2dx$ $=\frac{1}{2}\int\{g(x)\}^{10}g'(x)dx$ $=\frac{1}{2}\int t^{10}dt$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}t^{11}+C$ $=\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C$ 위의 계산에서 $\int\{g(x)\}^{10}g'(x)dx=\int t^{10}\frac{dt}{dx}dx$ $=\int t^{10}dt$ 와 같이 $\frac{dt}{dx}$가 마치 분수인 것처럼 계산됨을 이용하면 좀 더 쉽게 치환적분법을 사용할 수 있다. $2x+1=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로 $\int(2x+1)^{10}dx=\int t^{10}\frac{dx}{dt}dt=\int t^{10}\frac{1}{2}dt$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}t^{11}+C$ $=\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C$			
	함께하기	다음 부정적분을 구하여라. (1) $\int\cos(3x-2)dx$ (2) $\int(2x-1)\sqrt{2x+1}dx$ (3) $\int\cos^3 x\sin x dx$ [풀이] (1) $3x-2=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이므로 $\int\cos(3x-2)dx=\int\cos t\cdot\frac{1}{3}\cdot dt$ $=\frac{1}{3}\sin t+C$ $=\frac{1}{3}\sin(3x-2)+C$ (2) $\sqrt{2x+1}=t$라 하면 $2x+1=t^2$, $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\frac{dx}{dt}=t$이므로 $\int(2x-1)\sqrt{2x+1}dx$ $=\int(t^2-2)\cdot t\cdot tdt=\int(t^4-2t^2)dt$ $=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C=\frac{1}{15}t^3(3t^2-10)+C$ $=\frac{1}{15}(6x-7)(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$	• 칠판을 주시하며 질문에 답한다.		

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
		(3) $\cos x=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{\sin x}$이므로 $\int\cos^3 x\sin x\,dx$ $=\int t^3\sin x\left(-\frac{1}{\sin x}\right)dt$ $=\int -t^3dt=-\frac{1}{4}t^4+C$ $=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$			
	스스로 하기	다음 부정적분을 구하여라. (1) $\int(3x-1)^5dx$ (2) $\int\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)dx$ (3) $\int\sin^2 3x\,dx$ (4) $\int x\sqrt{1-2x}\,dx$ (5) $\int 2xe^{x^2}dx$ (6) $\int\sin^2 x\cos x\,dx$ • 가능하면 학생들에게 설명을 요구하고 풀이가 잘 된 학생에게 칭찬한다. • 시간이 부족한 경우에는 교사가 설명하며 정답을 확인한다.	• 지명된 학생은 칠판에 풀고 나머지 학생은 공책에 푼다. (풀이) (1) $3x-1=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이므로 $\int(3x-1)^5dx=\int t^5\frac{1}{3}dt$ $=\frac{1}{18}t^6+C$ $=\frac{1}{18}(3x-1)^6+C$ (2) $\frac{\pi}{4}+2x=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로 $\int\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{2}dt$ $=-\frac{1}{2}\cos t+C$ $=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)+C$		
		• (3)의 보충설명 $\int\sin^n x\,dx\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 계산하는 방법 (i) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ (ii) $\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx$ (iii) $\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\sin x\,dx$ $=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$ (iv) $n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots$일 때 $\int\sin^{2k+1}x\,dx=\int\sin^{2k}x\cdot\sin x\,dx$ $=\int(1-\cos^2 x)^k\sin x\,dx$	(3) $\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}$에서 $6x=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{6}$이므로 $\int\sin^2 3x\,dx=\int\frac{1-\cos 6x}{2}dx$ $=\frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx$ $=\frac{1}{2}\left\{\int 1dx-\int\cos 6x\,dx\right\}$ $=\frac{1}{2}\left\{\int 1dx-\int\cos t\frac{1}{6}dt\right\}$ $=\frac{1}{2}\left\{x-\frac{1}{6}\sin t\right\}+C$ $=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$ (4) $\sqrt{1-2x}=t$라 하면 $1-2x=t^2$, $\frac{dx}{dt}=-t$ 이므로 $\int x\sqrt{1-2x}\,dx=\int\frac{1-t^2}{2}\cdot t\cdot(-t)dt$ $=\frac{1}{2}\int(t^4-t^2)dt$		

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
			$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C$ $=\frac{1}{30}t^3(3t^2-5)+C$ $=\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{1-2x}+C$ (5) $x^2=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2x}$이므로 $\int 2xe^{x^2}dx=\int e^t dt$ $=e^t+C$ $=e^{x^2}+C$ (6) $\sin x=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cos x}$이므로 $\int \sin^2 x\cos x dx=\int t^2 dt$ $=\frac{1}{3}t^3+C$ $=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$ • 풀이 후 설명한다.		30분
형성 평가	수준별 학습	익힘책 17, 19, 20쪽 하 → 바탕 다지기(17쪽)-함께하기, 스스로 하기 중 → 기본 익히기(19쪽)-1-(2),(3),(4), 3 기본 익히기(19쪽)-1-(5),(6), 3 상 → 실력 키우기(20쪽)-1-(1)	• 수준별로 공책에 문제를 풀이한다. ※ 시간의 여유가 있는 경우 다른 수준의 문제도 풀어 본다.		10분
정리 및 차시 예고	정리 과제 제시 차시 예고	• 치환적분법 $g(x)=t$라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다. $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$ • 다음 시간까지 수준별로 위에 제시된 상, 중, 하 분류에 따라 하+중, 중+상, 상+익힘책-개념 넓히기(21쪽)를 풀이하여 제출할 것. • 다음 시간에는 치환적분법을 활용하여 $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 꼴과 분수함수의 부정적분을 공부한다.	• 질문에 답한다. • 차시 확인 및 인사		5분

2nd part ›››

단원별 지도 자료

Ⅰ. 적분법

01 단원의 목차

1. 부정적분

1. 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분
   - 01 부정적분의 뜻과 성질
   - 02 다항함수의 부정적분
   - 03 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분
   - 04 삼각함수의 부정적분
   - 05 지수함수의 부정적분
2. 치환적분법과 부분적분법
   - 01 치환적분법
   - 02 부분적분법

2. 정적분

1. 정적분의 뜻과 성질
   - 01 구분구적법
   - 02 정적분
   - 03 정적분의 기본 정리
   - 04 정적분의 성질
2. 정적분의 치환적분법과 부분적분법
   - 01 정적분의 치환적분법
   - 02 정적분의 부분적분법

3. 정적분의 활용

1. 도형의 넓이
   - 01 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이
   - 02 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이
   - 03 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이
2. 도형의 부피
   - 01 입체도형의 부피
   - 02 회전체의 부피
3. 속도와 거리
   - 01 수직선 위에서의 속도와 거리
   - 02 평면 위에서의 속도와 거리
   - 03 곡선의 길이

02 단원의 지도 목표

1. 부정적분

① 부정적분의 뜻을 알게 한다.
② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알게 하고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.
③ 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있게 한다.
④ 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.
⑤ 지수함수와 로그함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.
⑥ 치환적분법을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
⑦ 부분적분법을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

2. 정적분

① 구분구적법을 이해하게 하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있게 한다.
② 정적분의 뜻을 알게 한다.
③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하게 하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.
④ 정적분의 성질을 이해하게 하고, 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

3. 정적분의 활용

① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.
② 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.
③ 회전체의 부피를 구할 수 있게 한다.
④ 정적분을 이용하여 속도와 거리에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.
⑤ 곡선의 길이를 구할 수 있게 한다.

03 지도상의 유의점

① 부정적분에서는 적분상수가 반드시 필요함을 강조한다.

② 삼각함수, 지수함수의 도함수와 부정적분 공식은 서로 역의 관계임을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있도록 지도한다.
③ 치환적분법을 적절하게 활용하도록 지도하되 지나치게 어렵고 복잡한 부정적분에 몰두하지 않도록 한다.
④ 정적분의 성질을 이용할 수 있도록 피적분함수를 변형하는 방법을 익히도록 지도한다.
⑤ 치환적분법은 합성함수의 미분법을 활용한 적분법임을 확인시키고, 변수의 치환과 더불어 적분 구간의 치환에도 유의한다.
⑥ 주어진 곡선의 개형을 그리고, 구하는 넓이가 어느 부분인가를 확인한 다음에 적분 구간을 정하도록 지도한다.
⑦ 경과 거리란 동점이 움직인 길이를 가리키므로, 경과 거리를 구하는 것은 t를 매개변수로 하여 $x=x(t), y=y(t)$와 같이 곡선의 방정식이 주어졌을 때, 곡선의 길이를 구하는 것과 일치함을 알게 한다.

04 단원의 이론적 배경

고등학교에서 배우는 적분은 코시 적분이다. 이 적분은 연속함수와 (불연속점이 유한 개인) 구분적 연속함수를 다루기에 적절하다.
그런데 리만(Riemann, G.F.B.; 1826~1866)은 좀더 일반적인 함수, 이를테면 임의의 유한 구간에 불연속점이 무수히 많은 함수의 적분에 대한 논문을 1852년경에 썼다. 그러나 이 논문은 그가 죽은 뒤인 1867년에 발표되었다. 이 논문의 '삼각급수에 의한 함수의 표현에 대하여' 에서는 각 소구간에서 임의로 선택한 점 $\eta_k^*\in[x_{k-1}, x_k]$에 대하여 다음 값을 생각하였다.

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k^*)\Delta x_k$$

그리고 Δx_k의 최댓값이 0에 수렴할 때 S가 일정한 값 V에 수렴하면, 즉 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 Δx_k의 최댓값이 δ보다 작은 모든 분할에 대하여 $|S-V|<\varepsilon$이면, 함수 f는 구간 $[a, b]$에서 (리만)적분가능하다라 하고, 이를 기호 $V=\int_a^b f(x)dx$로 나타내었다.
리만의 정의는 코시의 정의와 매우 유사하다. 그러나 코시가 연속함수에서 출발한 반면에 리만은 유계인 함수에서 출발했고, 소구간의 한쪽 끝점을 선택한 코시와 달리 리만은 소구간의 임의의 점을 선택했다.
이렇게 리만 적분은 융통성이 커졌으며, 특히 이것은 적분의 존재에 대한 필요충분조건을 확립할 수 있게 했다. (여기서 제시한 리만 적분의 정의와 동치이지만 리만 상합과 리만 하합을 이용하여 적분을 정의하는 방법이 있다. 그런 정의에서 리만 적분가능하기 위한 필요충분조건은 임의의 양수 ε에 대하여 상합과 하합의 차가 ε보다 작은 분할이 존재하는 것이다.)
또 유계인 폐구간 위에서 연속함수는 리만 적분가능하고, 이때 코시와 리만 적분값은 서로 일치한다. 단조함수는 (불연속점이 무수히 많더라도) 리만 적분가능함을 증명할 수 있다.
코시 적분에 비하여 리만 적분은 더 넓은 범위의 함수를 다룰 수 있게 한다. 그러나 다음과 같은 디리클레 함수는 리만 적분가능하지 않다.

$$f:[0, 1] \longrightarrow R,\ f(x)=\begin{cases} 1 & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

집합론에서 알 수 있듯이, 유리수의 집합은 가산집합이고 무리수의 집합은 비가산집합으로, 무리수는 유리수와 비교할 수 없을 만큼 많이 존재한다. 또 르베그(Lebesgue, H. L.; 1875~1941)의 측도(measure)에 따르면 구간 [0, 1]에서 유리수 집합의 측도는 0이고 무리수 집합의 측도는 1이다. 그러므로 0부터 1까지 디리클레 함수의 적분값이 0이 되는 것이 수학적으로 합당하다.
이와 같이 디리클레 함수도 다룰 수 있도록, 적분가능한 함수의 범위를 더욱 넓게 확장시킨 것이 바로 1901년에 발표된 르베그 적분이다. 리만 적분의 약점을 보완한 르베그 적분은 이론다운 최초의 적분 이론으로 평가받고 있으며 현대 해석학의 기초를 이루고 있다.

1. 카발리에리의 불가분량의 방법

갈릴레이는 '$0 \le x \le a$, $0 \le y \le f(x)$' 와 '$0 \le x \le a$, $0 \le y \le g(x)$' 의 넓이의 비는 n을 충분히 크게 했을 때의 $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right)$와 $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{ka}{n}\right)$의 비와 같음을 믿고 있었다. 카발리에리는 이 생각을 '극한' 의 개념으로 발전시켜, '모든 세로 좌표의 합' 이라는 용어를 사용하여 엄밀한 뜻에서 양자의 비가 같음을 밝히고 있다.

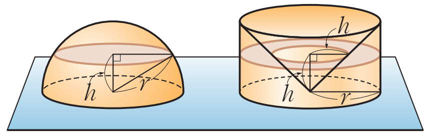

카발리에리

주어진 평면도형의 불가분량은 그 도형의 현을 의미하고, 그 평면도형은 그와 같이 평행하게 무한히 많은 불가분량의 집합으로 이루어진 것으로 간주할 수 있다. 마찬가지로, 주어진 입체도형의 불가분량은 그 도형의 단면이고, 그 입체도형은 그와 같이 평행하게 무한히 많은 불가분량의 집합으로 이루어진 것으로 간주할 수 있다. 그래서 만약 어떤 평면도형의 평행한 불가분량들 각각을 자체의 축을 따라서 불가분량의 끝점들은 연속적인 경계를 유지하면서 밀어 움직이면, 그리고 원래의 도형과 새로 생긴 도형이 같은 불가분량으로 이루어지기만 한다면, 새로 생긴 도형과 원래의 도형의 넓이는 서로 같다고 카발리에리는 주장했다. 주어진 입체도형의 평행한 불가분량들을 마찬가지 방법으로 밀어 움직이면, 새로 얻어진 입체도형의 부피는 원래의 입체도형의 부피와 같게 될 것이다.

2. 카발리에리의 원리의 활용

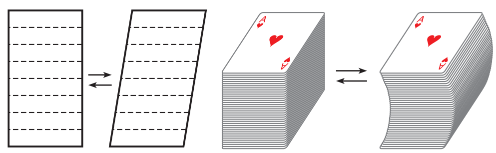
만약 두 개의 평면도형이 한 쌍의 평행선 사이에 끼어 있고, 만약 그 평행선과 평행한 임의의 선으로 그 두 평면도형을 잘랐을 때 생기는 두 선분의 길이가 항상 일정한 비를 가지면, 두 평면도형의 넓이도 또한 그 비를 갖는다.

만약 두 개의 입체도형이 한 쌍의 평행면 사이에 끼어 있고, 그 평행면들과 평행인 임의의 면으로 그 두 입체도형을 잘랐을 때 생기는 두 단면의 넓이가 항상 일정한 비를 가지면, 두 입체도형의 부피도 또한 그 비를 갖는다.



반구와 원뿔을 제거한 직원기둥은 같은 평면 위에 놓여 있다. 이 두 입체도형을 밑면에서 h의 높이에 있는 밑면과 평행인 평면으로 자른 단면은 각각 원판과 원환이 된다. 초등 기하학에 의해서 이 두 단면의 넓이는 $\pi(r^2-h^2)$으로 서로 같다. 카발리에리의 둘째 원리에 따라서 두 입체도형의 부피는 같아야 한다. 따라서 구의 부피 V에 대한 공식은 다음과 같다.

$$V = 2\{(\text{직원기둥의 부피}) - (\text{원뿔의 부피})\}$$
$$= 2\left(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$



3. 적분학의 탄생

이 카발리에리의 '불가분의 기하학' 은 매우 획기적인 것이었지만, 그 불가분법의 약점을 발견하고 그 개념을 근본적으로 개조한 학자는 토리첼리(Torricelli, 1608~1647)와 파스칼(Pascal, B.; 1623~1662)이며, 이 두 학자에 의하여 구분적분법의 단서가 열렸다고도 생각할 수 있다. 그 어느 쪽도 적분은 직접 구적과 관련된 뜻을 가지는 것이었으나, 현대적 표현으로

$$\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx, \quad \int cf dx = c\int f dx$$

등의 일반법칙에 생각이 미치는 등 점차 문제의 추상화가 진행되었다. 그 후 뉴턴, 라이프니츠에 이르기까지 구체적인 문제의 연구를 통하여 점차 적분의 내용도 풍부해지고, 무한급수를 사용하는 방법, 치환적분법, 부분적분법 등이 사용되기에 이르렀다.

오늘날의 미분, 적분에서 사용되는 기호인 $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\int f(x)dx$ 등은 주로 라이프니츠가 창안한 것들이다.

Ⅱ. 순열과 조합

01 단원의 목차

1. 순열, 조합과 이항정리

1. 중복순열과 원순열
   - 01 중복순열
   - 02 원순열
   - 03 같은 것이 있는 순열
2. 중복조합
   - 01 중복조합의 뜻
   - 02 중복조합의 수
3. 이항정리
   - 01 이항정리의 뜻
   - 02 이항정리의 성질

02 단원의 지도 목표

1. 순열, 조합과 이항정리

① 중복순열의 뜻을 알게 하고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

② 원순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하게 하고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

③ 중복조합의 뜻을 알게 하고, 그 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

④ 이항정리의 뜻을 이해하게 한다.

⑤ 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

⑥ 파스칼의 삼각형을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

03 지도상의 유의점

① 순열은 순서를 생각하여 배열하는 경우의 수임을 강조하도록 한다.

② 중복순열은 중복을 허용하기 때문에 ${}_n\Pi_r$에서 $n<r$인 경우도 있음을 이해시키도록 한다.

③ 염주순열, 같은 것이 있는 경우의 원순열은 다루지 않는다.

④ 실제로 각 조합의 경우를 열거하여 순열과의 차이를 이해시키도록 한다.

⑤ 조합에서 순서를 고려하면 순열이 됨을 이해시키도록 한다.

⑥ 순열과 조합은 복잡한 상황보다는 쉽고 대표적인 문제에서 사고력을 기를 수 있도록 한다.

⑦ 이항정리는 이론적으로나 실질적으로 널리 응용되는 중요한 정리이므로 ${}_n\mathrm{C}_r$의 정의와 성질을 철저하게 지도한다.

04 단원의 이론적 배경

1. 중복순열과 중복조합

순열과 조합은 어떤 사건을 분석할 때 가장 기본적으로 사용되는 개념이다. 즉, 순열은 주어진 대상을 배열하는 과정 또는 그 결과를 뜻하고, 조합은 주어진 대상에서 일부를 선택하는 과정 또는 그 결과를 뜻한다.

이러한 순열과 조합에서 주어진 대상을 중복사용하여 배열하거나 선택하는 것이 중복순열, 중복조합이다.

따라서 중복순열과 중복조합을 지도할 때에는 순열과 조합에 대한 기본 개념을 확인하여야 한다.

원순열(circular permutation)을 지도할 때에는 원의 회전성을 염두에 두어야 한다. 즉, 원에서는 시작과 끝을 구별하지 않음을 알아야 한다.

2. 계승($n!$)과 스터링(Stirling)의 공식

기호 $n!$은 n의 계승 또는 n 팩토리얼(factorial)이라 읽고, 이는 1부터 n까지의 모든 자연수의 곱을 나타낸다.

이 기호는 크람프(Kramp, C.; 1760~1826)에 의하여 1808년에 도입되었다. 그는 이전에 사용된 기호에 의하여 초래되는 인쇄상의 어려움을 피하기 위하여 이 기호를 선택하였다.

n이 큰 수일 때, $n!$은

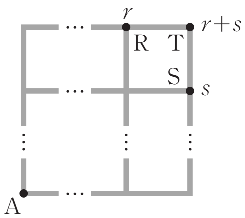
$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \quad (e=2.71828\cdots)$$

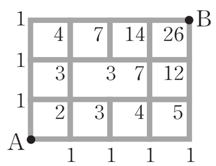
과 거의 같다는 스터링의 공식이 알려져 있다.

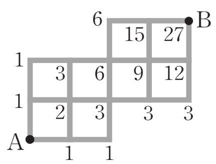
즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=\sqrt{2\pi}$이다.

3. 최단 경로의 수 구하기

오른쪽 그림과 같이 A지점에서 R지점과 S지점까지 이르는 최단 경로의 수가 각각 r, s일 때, A지점에서 T지점까지 이르는 최단 경로의 수는 $r+s$이다. 이것을 이용하면 복잡한 도로망의 경우에도 다음 그림과 같이 각 지점까지의 최단 경로의 수를 써서 구할 수 있다.





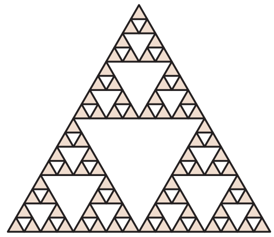


4. 파스칼의 삼각형과 시어핀스키의 삼각형

파스칼의 삼각형의 n행에 있는 n개의 이항계수의 합은 2^{n-1}이다.

행	파스칼의 삼각형	합
1	1	$1=2^0$
2	1 1	$2=2^1$
3	1 2 1	$4=2^2$
4	1 3 3 1	$8=2^3$
5	1 4 6 4 1	$16=2^4$
6	1 5 10 10 5 1	$32=2^5$
⋮	⋮	⋮

파스칼의 삼각형에서 이항계수 중 짝수는 0, 홀수는 1로 바꾸어 놓으면 시어핀스키(Sierpinski)의 삼각형 모양으로 된다.



5. 다항정리

항이 a, b, c 세 개인 $(a+b+c)^n$의 전개식을 3항정리라 한다. 일반적으로 3항정리 이상을 다항정리라 한다.

$(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n$의 일반항은

$${}_nC_s a^{n-s}(b+c)^s$$

여기서 $(b+c)^s$의 일반항은 ${}_sC_r b^{s-r}c^r$이므로

$(a+b+c)^n$의 일반항은

$$\begin{aligned}&{}_nC_s a^{n-s}\cdot{}_sC_r b^{s-r}c^r\\&=\frac{n!}{s!(n-s)!}\cdot\frac{s!}{r!(s-r)!}a^{n-s}b^{s-r}c^r\end{aligned}$$

$n-s=p$, $s-r=q$라 하면

$$p+q+r=(n-s)+(s-r)+r=n$$

따라서 $(a+b+c)^n$의 일반항은 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \text{ (단, } p+q+r=n)$$

Ⅲ. 확률

01 단원의 목차

1. 확률의 뜻과 활용

1. 확률의 뜻과 기본 성질

01 시행의 뜻

02 수학적 확률

03 통계적 확률

04 확률의 기본 성질

2. 확률의 계산과 활용

01 확률의 덧셈정리

02 여사건의 확률

2. 조건부확률

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

01 조건부확률의 뜻

02 확률의 곱셈정리

03 사건의 독립과 종속

04 독립시행

02 단원의 지도 목표

1. 확률의 뜻과 활용

① 시행의 뜻을 이해하게 한다.

② 수학적 확률과 통계적 확률의 의미와 그 관계를 이해하게 한다.

③ 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.

④ 배반사건의 뜻을 알게 한다.

⑤ 확률의 덧셈정리를 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

⑥ 여사건에 대한 확률을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

2. 조건부확률

① 조건부확률의 뜻을 알게 하고, 이를 구할 수 있게 한다.

② 확률의 곱셈정리를 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하게 한다.

④ 독립시행의 뜻을 알게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

03 지도상의 유의점

① 확률은 논리적 과정보다는 직관적으로 받아들일 수 있는 실생활 소재를 활용하여 설명하도록 한다.

② 확률은 상황에 따라 통계적 확률 또는 수학적 확률로 구할 수 있음을 이해시키도록 한다.

③ 수학적 확률의 정의로부터 확률의 기본 성질을 유도하도록 지도한다.

④ 확률의 계산에서는 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하는 복잡한 문제보다는 간단한 보기를 들어 기초를 다지는 정도로 다루도록 한다.

⑤ '적어도 ~인 사건' 의 확률은 여사건의 확률로 구하도록 지도한다.

⑥ 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 표본공간으로 생각했을 때, 사건 B가 일어나는 경우의 확률임을 이해하도록 지도한다.

⑦ 독립시행의 확률은 통계 단원의 이항분포에서 중요하게 이용되므로 그 의미를 정확히 이해시키도록 한다.

04 단원의 이론적 배경

확률을 실제적으로 결정하는 것은 확률론의 문제뿐만 아니라 통계학의 문제이다. 여기서는 고전적 확률 개념에 관련하여 소개하고자 한다.

1. 미제스(Mises, L.; 1883~1953)의 이론

확률을 응용하는 데 있어서는 수학적 확률과 통계적 확률이 일치할 때 비로소 그 의미가 있다. 미제스는 시행을 무한히 반복한다고 하는 이상적 실험을 생각하고, 이것에 집단이라는 개념을 도입해서 확률론을 조직했다. 이를테면, 동전을 던져서 앞면이 나오면 0, 뒷면이 나오면 1을 대응시키고, 같은 동전을 반복하여 계속 던지면, 0과 1로 이루어진 무한수열

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ \cdots$$

을 얻는다.

여기서 처음의 n항 중 0인 항의 개수를 n_0, 1인 항의 개수를 n_1이라 할 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_0}{n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n_1}{n}=\frac{1}{2}$$

이며, 이 수열에서 적당한 부분수열을 택해도 같은 성질을 갖는다고 생각한다.

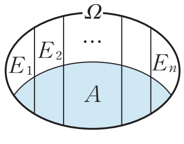
미제스는 이와 같은 무규칙성을 갖는 수열을 생각하고, 집단(단순집단과 일반집단)이라는 개념을 바탕으로 하여 확률론의 공리에 의한 구성에 성공했다.
미제스의 이론에서는 집단에 대하여 확률이 정의되고, 집단에서 새로운 집단을 유도하고, 본시의 집단에 있어서의 확률에서 새 집단에서의 확률을 구한다.
그 방법은 선출, 혼성, 분할, 결합이 있는데 선출에 의해서는 확률은 변하지 않음을, 혼성에 의해서는 확률의 덧셈정리를, 분할에 의해서는 베이스의 정리를, 결합에 의해서는 곱셈정리를 얻는다.
미제스의 이론에서는 집단의 조건을 만족시키는 것에 대하여 확률을 생각하므로, 반복할 수 없는 것은 확률의 대상이 될 수 없다.

2. 무이유의 이유(reason of no reason)

확률의 수학적 정의에서 '같은 정도로 기대된다.' 고 하는 것을 가정했는데, 이것은 직관적으로 생각하면 쉬우나 따지고 보면 문제가 달라진다. 이 수학적 정의를 최초로 한 사람은 라플라스(Laplace, P.S.; 1749~1827)이다.
당시 라플라스의 확률론을 반대하는 학자들이 이것을 따지고 들었다. 그래서 라플라스 쪽에서 이에 대한 대답을 못하게 되자, 거꾸로 같은 정도로 기대할 수 없는 이유를 말해 보라고 하였다. 그러자 반대하는 사람들도 그 이유를 말하지 못하고 우물쭈물하고 있을 때, 라플라스 쪽에서 '이유를 말하지 못하는 것이 바로 같은 정도로 기대할 수 있는 이유다.' 라고 했다.
이것을 '무이유의 이유' 라고 한다.

3. 원인의 확률-베이스(Bayes)의 정리

일반적으로 확률론에서는 연역형의 확률, 즉 원인을 알고 사건이 일어날 확률을 생각한다. 그러나 여기서는 이미 일어난 사건에 대하여 결과를 알고 원인의 확률을 구하는 문제, 즉 귀납형의 확률을 생각한다.
전사건 Ω를 서로 배반인 n개의 사건 $E_1, E_2, \cdots, E_n$으로 분할한다. 즉,



$$E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n)$$
$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$$

이때, 사건 A에 대하여 $A \cap E_1, A \cap E_2, \cdots, A \cap E_n$은 서로 배반이고, 그 합집합은 A가 된다.
여기서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \cap E_1) + \mathrm{P}(A \cap E_2) + \cdots + \mathrm{P}(A \cap E_n) \\ &= \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(A|E_1) + \mathrm{P}(E_2)\mathrm{P}(A|E_2) + \cdots \\ &\quad + \mathrm{P}(E_n)\mathrm{P}(A|E_n)\end{aligned}$$

그런데

$$\mathrm{P}(E_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|E_i)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(E_i) \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

이므로 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\mathrm{P}(E_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|E_i)\mathrm{P}(E_i)}{\mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(A|E_1) + \cdots + \mathrm{P}(E_n)\mathrm{P}(A|E_n)}$$

이것을 베이스의 정리라고 한다.
위의 베이스의 정리에서 사건 $E_1, E_2, \cdots, E_n$을 n가지의 '원인' 이라고 한다면 $\mathrm{P}(E_i)$는 원인의 가능성으로서 사전확률(prior probability)이라 할 수 있고, $\mathrm{P}(A|E_i)$는 원인 E_i의 결과로서 A가 관측될 확률이다. 또한 $\mathrm{P}(E_i|A)$는 A가 관측된 후에 원인 E_i의 가능성으로서 사후확률(posterior probability)이라고 할 수 있다.

4. 확률의 공리적 구성

확률의 수학적 정의에서 '같은 정도로 기대된다.' 라는 가정은 따지고 보면 문제가 있다.
이런 문제를 피하기 위하여 콜모고로프(Kolmogorov, A.N.; 1903~1987)는 '확률론의 기초 개념' 의 제1장에서 다음과 같은 확률공간의 공리를 두고 있다.

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\quad \mathrm{P}(A) \geq 0$
(2) 전체 표본공간 E에 대하여 $\quad \mathrm{P}(E) = 1$
(3) $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 서로 배반사건일 때
$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)$$

Ⅳ. 통계

01 단원의 목차

1. 확률분포

1. 확률변수와 확률분포
   01 확률변수의 뜻
   02 이산확률변수와 확률질량함수
   03 연속확률변수와 확률밀도함수
2. 평균과 표준편차
   01 이산확률변수의 평균과 표준편차
   02 연속확률변수의 평균과 표준편차
   03 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차
3. 이항분포
   01 이항분포의 뜻
   02 이항분포의 평균과 표준편차
   03 이항분포의 분포표와 그래프
   04 큰 수의 법칙
4. 정규분포
   01 정규분포의 뜻과 정규분포곡선의 성질
   02 표준정규분포
   03 표준화
   04 이항분포와 정규분포의 관계

2. 통계적 추정

1. 표본조사와 표본평균의 분포
   01 표본조사
   02 표본평균의 뜻
   03 표본평균의 분포
2. 모평균과 모비율의 추정
   01 모평균의 추정
   02 표본비율의 분포
   03 모비율의 추정

02 단원의 지도 목표

1. 확률분포

① 확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다.
② 이산확률변수의 뜻을 알게 하고, 확률질량함수의 성질을 이해하게 한다.
③ 연속확률변수의 뜻을 알게 하고, 확률밀도 함수의 성질을 이해하게 한다.
④ 이산확률변수와 연속확률변수, 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.
⑤ 이항분포의 뜻을 알게 하고, 그 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.
⑥ 이항분포의 분포표와 그래프를 이해하게 한다.
⑦ 정규분포의 뜻을 알게 하고, 정규분포곡선의 성질을 이해하게 한다.
⑧ 표준정규분포의 뜻을 알게 하고, 활용할 수 있게 한다.
⑨ 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하게 한다.

2. 통계적 추정

① 모집단과 표본의 뜻을 알게 한다.
② 전수조사와 표본조사, 임의추출의 뜻을 알게 하고, 그 방법을 이해하게 한다.
③ 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 뜻을 알게 한다.
④ 표본평균과 모평균의 관계를 이해하게 한다.
⑤ 모평균을 추정하게 하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.
⑥ 표본비율과 모비율의 관계를 이해하게 한다.
⑦ 모비율을 추정하게 하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.

03 지도상의 유의점

① 확률변수와 확률분포의 뜻은 구체적인 보기를 통하여 이해하도록 지도한다.
② 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 때, 구체적인 보기에서 출발하여 일반화하도록 한다.
③ 큰 수의 법칙은 논리적인 유도를 피하고 구체적인 보기를 통하여 이해시키도록 한다.

④ 연속확률분포로서의 정규분포를 이해시키고, 표준정규분포를 활용시키도록 지도한다.
⑤ 이항분포와 정규분포 사이의 관계는 그래프를 통하여 이해시키도록 한다.
⑥ 표본평균의 뜻과 그 분포를 구체적인 보기를 통하여 이해시키록 하고, 표본평균과 모평균의 관계를 알게 한다.
⑦ 모평균의 추정은 모집단이 정규분포인 경우만 다룬다.
⑧ 모비율의 추정은 표본의 크기가 큰 경우에만 다룬다.

04 단원의 이론적 배경

1. 학문으로서의 통계학

통계학(statistics)의 어원은 라틴어의 status(상태)에서 유래한다. 이 status가 중세 이후 정치적인 의미로서 state (국가)를 가리키게 되었다. 따라서 '통계학(statistics)' 은 원래의 의미가 '국가의 상태를 조사, 연구하는 것' 임을 알 수 있다. 학문으로서의 통계학의 성립은 17～18세기 계몽주의 시대에 다음과 같이 2개의 큰 줄기로서 이루어졌다.

(1) 국세학(國勢學, Staaten Kunde)
국세학은 주로 독일에서 발전하였는데 이의 어원은 콘링(Conring, H.; 1606～1681)이 1660년 헤르스타트 대학에서 'Staatskunde' 라는 과목을 강의한 것에서 유래한다. 그는 이 강좌에서 '장차 정치가가 되려는 사람은 헌법 및 행정의 지식과 더불어 국가가 어떤 국토, 어떤 국민으로 구성되어 있는가를 올바르게 아는 것이 중요하다.' 고 강조하였다.

(2) 정치산술학(政治算術學, Political Arithmetic)
정치산술학은 주로 영국에서 발전하였는데 이의 어원은 그랜트(Graunt, J.; 1620～1674)가 1662년에 발표한 논문 '런던 시민의 생사에 대한 자연적 그리고 정치적 관찰(Natural and Political Observations on the London Bills of Mortalitly)' 에서 유래한다. 그는 이 논문에서 질병 또는 전쟁으로 인한 남녀의 성비(性比)가 어떻게 변화하는가를 발표하고, 인구의 발전에 법칙이 있음을 찾았다.

2. 근대통계학과 현대통계학의 발달 과정

17～18세기 프랑스에서 발달한 확률론과 영국에서 발달한 정치산술학의 결합으로 근대통계학은 태동하였다. 즉, 벨기에의 케틀레(Quételet, L.A.J.; 1796～1874)는 정치산술학파가 사용하는 자료에 확률론적으로 논리를 적용하여 근대통계학의 형태를 완성시켰다.
케틀레 이후에 근대통계학의 발전에 공헌한 사람은 유전현상을 수학적으로 해설하는 데 성공한 갈톤(Galton, F.; 1822～1911)이 있다.
피어슨(Pearson, K.; 1857～1936)은 생물측정학, 우생학, 유전학을 통하여 통계적 연구 방법의 확립에 일생을 바쳤는데 1901년 세계 최초의 통계학 잡지인 Biometrika를 갈톤 등과 함께 창간하였다.
현대통계학은 피어슨의 제자인 고셋(Gosset, W.S.; 1876～1936)에 의하여 시작되었다. 그가 1908년에 'Student' 라는 이름으로 Biometrika에 발표한 논문 'The Probable Error of a Mean' 은 현대통계학의 기초가 되었다. 고셋의 결과를 계승한 피셔(Fisher, R.A.; 1890～1962)는 새로운 분포법칙을 유도하고 여러 가지 검정법을 고안하여 현대통계학을 완성하였다.

〈참고 자료〉
1. 정동명 · 조승제(1991), 실해석학개론, 경문사
2. Bressoud, D.M., 허민 · 오혜영 역(1997), 실해석학, 경문사
3. 박한식 · 이강섭(1985), 수리통계학, 교학연구사
4. 이강섭 외 6인(2003), 고등학교 수학 I 교사용지도서, (주)지학사
5. 정한영(1995), 통계학사 개론, 한림대학교 출판부
6. 허명회(1991), 통계학사 콜로키움, 자유아카데미
7. Eves, H., 이우영 · 신항균 역(1999), 수학사, 경문사

I 적분법

1 부정적분　2 정적분　3 정적분의 활용

컴퓨터 단층 촬영기(CT)는 신체의 단면을 촬영하여 그 내부 구조를 파악하고, 종양의 크기와 위치를 알아보는 의료기이다. 이처럼 의학에서도 인체를 세분하여 촬영하고 그것을 다시 종합하여 전체를 파악하는 적분적인 개념을 활용한다.

단원의 흐름

이미 배운 내용

▶**고등학교 수학**
- 함수와 그 그래프
- 부등식의 영역
- 삼각함수

▶**수학 Ⅰ**
- 수열의 극한

이번에 배울 내용
- 부정적분
- 정적분
- 정적분의 활용

다음에 배울 내용

▶**적분과 통계**
- 연속확률분포

컴퓨터 단층 촬영기

이 단원의 학습 목표

1. 부정적분의 뜻을 안다.
2. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
3. 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.
4. 치환적분법과 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
5. 정적분의 뜻을 안다.
6. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
7. 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.
8. 정적분을 활용하여 도형의 넓이, 부피를 구하고, 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

10

단원을 시작하기 전에 …

항등식

1 다음 등식이 항등식이 되도록 a, b의 값을 정하여라.

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

(2) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$

함수의 그래프

2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=|x^2-1|$ (2) $y=\sin x$

(3) $y=e^x-1$ (4) $y=\ln x$

삼각함수의 배각의 공식

3 다음 물음에 답하여라.

(1) $\cos x=\dfrac{3}{5}$일 때, $\sin 2x$의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $\sin x=\dfrac{3}{4}$일 때, $\cos 2x$의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right)$

극한값의 계산

4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

여러 가지 함수의 도함수

5 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=x^3+5x^2-2$ (2) $y=e^x$

(3) $y=\ln x-x^2$ (4) $y=\sin x\cos x$

(5) $y=(3x^2-5)^4$ (6) $y=\sin^n x$

단원을 시작하기 전에 ······ 풀이

1 (1) $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

$=\dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

이므로

$a+b=0,\ 2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$\boldsymbol{a=1,\ b=-1}$

(2) $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$

$=\dfrac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x+a-b}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

이므로

$a+b=0,\ a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}}$

2 (1) $x^2\ge1$일 때, 즉 $x\le-1$ 또는 $x\ge1$일 때

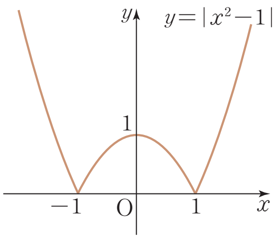
$y=x^2-1$

$x^2<1$일 때, 즉 $-1<x<1$일 때

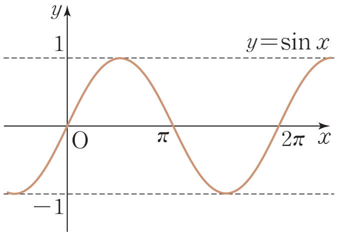
$y=-x^2+1$

$\therefore y=\begin{cases} x^2-1 & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1) \end{cases}$

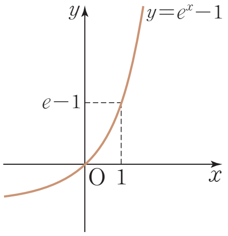
따라서 $y=|x^2-1|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



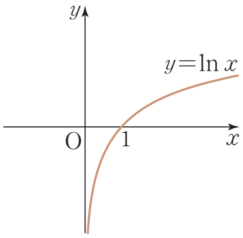
(2)



(3)



(4)



3 (1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0$이므로

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{24}{25}}$$

(2) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$$=1-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\mathbf{-\frac{1}{8}}$$

4 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

5 (1) $\boldsymbol{y'}=(x^3+5x^2-2)'$

$$=\boldsymbol{3x^2+10x}$$

(2) $\boldsymbol{y'}=(e^x)'=\boldsymbol{e^x}$

(3) $\boldsymbol{y'}=(\ln x-x^2)'$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{x}-2x}$$

(4) $\boldsymbol{y'}=(\sin x\cos x)'$

$$=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$$

$$=\cos x\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)$$

$$=\boldsymbol{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

(5) $\boldsymbol{y'}=\{(3x^2-5)^4\}'$

$$=4(3x^2-5)^3(3x^2-5)'$$

$$=4(3x^2-5)^3\cdot 6x$$

$$=\boldsymbol{24x(3x^2-5)^3}$$

(6) $\boldsymbol{y'}=(\sin^n x)'$

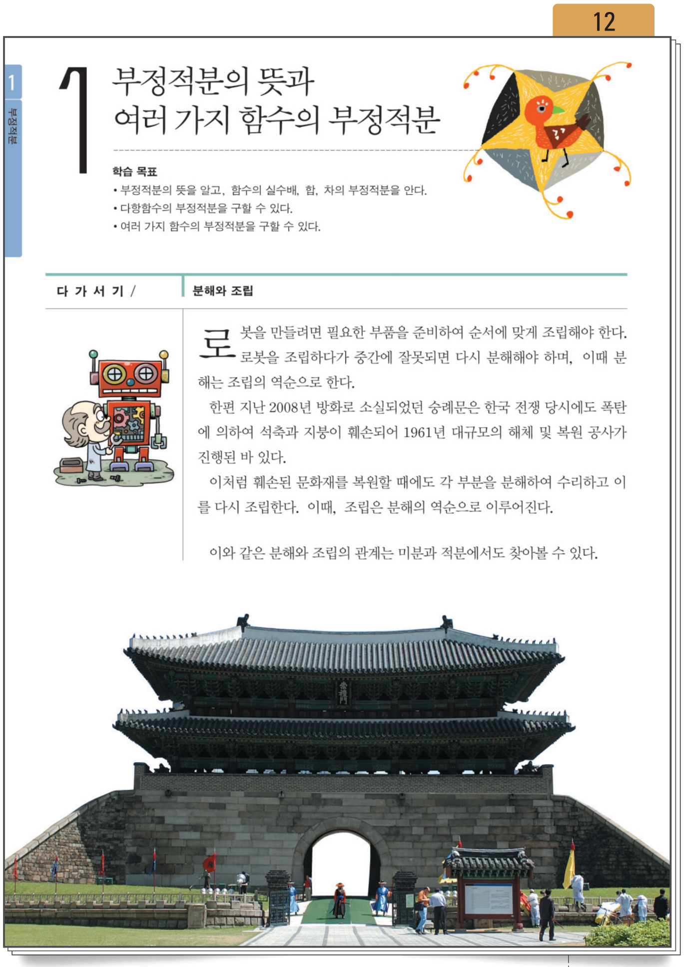
$$=n\sin^{n-1}x(\sin x)'$$

$$=\boldsymbol{n\sin^{n-1}x\cos x}$$

1 부정적분

이 단원을 배우면

- 부정적분의 뜻을 알 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
- 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있다.
- 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있다.
- 지수함수와 로그함수의 부정적분을 구할 수 있다.
- 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.



12

1 부정적분

1 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분

학습 목표

- 부정적분의 뜻을 알고, 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 안다.
- 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
- 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

다 가 서 기 / 분해와 조립

로봇을 만들려면 필요한 부품을 준비하여 순서에 맞게 조립해야 한다. 로봇을 조립하다가 중간에 잘못되면 다시 분해해야 하며, 이때 분해는 조립의 역순으로 한다.

한편 지난 2008년 방화로 소실되었던 숭례문은 한국 전쟁 당시에도 폭탄에 의하여 석축과 지붕이 훼손되어 1961년 대규모의 해체 및 복원 공사가 진행된 바 있다.

이처럼 훼손된 문화재를 복원할 때에도 각 부분을 분해하여 수리하고 이를 다시 조립한다. 이때, 조립은 분해의 역순으로 이루어진다.

이와 같은 분해와 조립의 관계는 미분과 적분에서도 찾아볼 수 있다.

다가서기 / 해설

수학자 드모르간(De Morgan, A. ; 1806～1871)이 '적분은 미분의 회상'이라고 말했듯이 미분과 적분 사이의 관계는 덧셈과 뺄셈, 인수분해와 전개 등의 관계와 마찬가지로 역연산 관계이다.

소단원의 학습 목표

1. 부정적분의 뜻을 알고, 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 안다.
2. 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
3. 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

부정적분, $\int f(x)dx$, **피적분함수**, **적분상수**

수학 이야기 |

배로(Barrow, I. ; 1630～1677)

런던에서 태어난 배로는 케임브리지 대학교에서 교육을 마쳤으며 파리, 이탈리아, 콘스탄티노플에서 고전을 연구하였다. 1659년에 귀국하여 사제가 되었으며, 1660년 케임브리지 대학교의 그리스 어 교수로 임명되었다. 그는 수학, 물리, 천문학, 신학에 걸쳐 두루 인정을 받은 학구적인 사람이다. 1663년 수학의 루커스 교수직이 신설되자 초대 교수가 되었으며 여기서 광학과 기하학의 강의로 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)에게 영향을 주었고, 1669년 제자 뉴턴에게 교수직을 물려주었다.

배로의 가장 중요한 수학적 업적은 그의 저서 '기하학 강의'인데, 이 책에서 현대 미분과정과 매우 비슷한 접근 방법이 나온다. 특히 페르마(Fermat, P. ; 1601～1665)의 접선법을 발전시키고 미분과 적분이 서로 역연산 관계에 있다는 것을 증명하여 미적분학의 기초를 닦은 것으로 유명하다. 배로는 일반적으로 미분법과 적분법이 역연산 관계라는 사실을 최초로 깨달은 사람이라고 일컬어진다.

01 부정적분의 뜻과 성질

탐 구 하 기 / 도함수 구하기

다음 표는 함수 $F(x)=x^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$F(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5		$\cdots$	
$F'(x)=f(x)$	1	$2x$			$5x^4$	$6x^5$	$\cdots$	nx^{n-1}

알 아 보 기 / 부정적분의 뜻을 알아보자.

함수 $f(x)$를 미분하면 도함수 $f'(x)$를 얻는다. 이제 미분한 결과가 $f(x)$가 되는 함수에 대하여 알아보자.

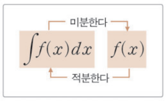
함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분** 또는 원시함수라 하고, 기호로

$$\int f(x)\,dx$$

와 같이 나타낸다.



부정적분(不定積分)을 영어로 indefinite integral이라고 한다.

기호 $\int f(x)dx$를 '$f(x)$의 부정적분' 또는 '인티그럴 $f(x)dx$'라고 읽는다.

이때, 함수 $f(x)$를 **피적분함수**라고 한다.

또 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.

| 보기 | 다음과 같이 세 함수 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$와 그 도함수를 생각해 보자.

$$F(x)=x^3+x \Rightarrow F'(x)=3x^2+1$$
$$G(x)=x^3+x+1 \Rightarrow G'(x)=3x^2+1$$
$$H(x)=x^3+x-3 \Rightarrow H'(x)=3x^2+1$$

여기서 x^3+x, x^3+x+1, x^3+x-3은 모두 함수

$$f(x)=3x^2+1$$

의 부정적분임을 알 수 있다.

탐구하기 / 풀이

$(x^3)'=3x^2$

$(x^4)'=4x^3$

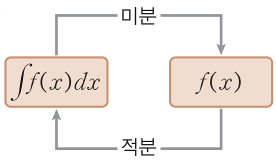
$(x^6)'=6x^5$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

따라서 빈칸에 알맞은 것을 써넣으면 다음 표와 같다.

$F(x)$	x	x^2	x^3	x^4
$F'(x)=f(x)$	1	$2x$	$\boldsymbol{3x^2}$	$\boldsymbol{4x^3}$
$F(x)$	x^5	$\boldsymbol{x^6}$	$\cdots$	$\boldsymbol{x^n}$
$F'(x)=f(x)$	$5x^4$	$6x^5$	$\cdots$	nx^{n-1}

알아보기 / 해설



위의 그림과 같이 미분과 적분은 역연산 관계이다.

- 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라고 하는 것은 $F'(x)=f(x)$일 때이다.

따라서 어떤 주어진 함수 $f(x)$의 부정적분은 여러 가지가 있다. 이를테면 두 함수

$$F(x)=x^3+2,\ G(x)=x^3+5$$

에 대하여 $F'(x)=3x^2$, $G'(x)=3x^2$이므로 $F(x)$와 $G(x)$는 모두 $f(x)=3x^2$의 부정적분이고, 상수항만 다르다는 것을 알 수 있다.

이들 외에도 함수 $3x^2$의 부정적분은 $x^3+\frac{1}{2}$, $x^3+\sqrt{2}$, $\cdots$와 같이 무수히 많다.

- $\int x^0\,dx=\int 1\,dx$는 간단히 $\int dx$로 나타낸다.
- 부정적분을 구한 다음에는 그것을 다시 미분하여 검산을 해야 한다. 이를테면

(1) $\int 3x^2\,dx=x^3+C$에서

$(x^3+C)'=3x^2$

(2) $\int 4x^3\,dx=x^4+C$에서

$(x^4+C)'=4x^3$

14

일반적으로 함수 $F(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나이고, $G(x)$가 $f(x)$의 또 다른 부정적분이면

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=f(x)$$

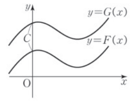
이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$$G(x)-F(x)=C\ (C\text{는 상수})$$

즉, $G(x)=F(x)+C$



따라서 $f(x)$의 모든 부정적분은 $F(x)+C$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때, 상수 C를 **적분상수**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

적분하는 것은 미분하는 것의 역연산이다.

부정적분

$F'(x)=f(x)$일 때

$$\int f(x)dx=F(x)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$\int 1\,dx$는 간단히 $\int dx$로 나타낸다.

| **보기** | (1) $\frac{d}{dx}x=1$이므로 $\int 1\,dx=x+C$

(2) $\frac{d}{dx}x^2=2x$이므로 $\int 2x\,dx=x^2+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3x^2\,dx$ (2) $\int 5x^4\,dx$

2 다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 적분상수)

(1) $\int f(x)dx=3x+C$ (2) $\int f(x)dx=3x^2+4x+C$

(3) $\int f(x)dx=x^3-2x^2+C$ (4) $\int f(x)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x+C$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\frac{d}{dx}x^3=3x^2$

이므로

$\int 3x^2dx=\boldsymbol{x^3+C}$

(2) $\frac{d}{dx}x^5=5x^4$

이므로

$\int 5x^4dx=\boldsymbol{x^5+C}$

2 (1) $(3x+C)'=3$

이므로

$\boldsymbol{f(x)=3}$

(2) $(3x^2+4x+C)'=6x+4$

이므로

$\boldsymbol{f(x)=6x+4}$

(3) $(x^3-2x^2+C)'=3x^2-4x$

이므로

$\boldsymbol{f(x)=3x^2-4x}$

(4) $\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x+C\right)'$

$=x^3+x^2+2$

이므로

$\boldsymbol{f(x)=x^3+x^2+2}$

보충 학습

함수 $f(x)$를 먼저 적분한 후에 미분을 한 결과와 먼저 미분한 후에 적분을 한 결과는 서로 같을까?

결론은 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx \neq \int \frac{d}{dx}f(x)dx$이다.

예를 들어 $f(x)=x^2$이라고 하면

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}\int x^2dx$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)$$
$$=x^2$$

$$\int \frac{d}{dx}f(x)dx=\int \frac{d}{dx}x^2dx$$
$$=\int 2x\,dx$$
$$=x^2+C$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int f(x)dx=x^2\neq x^2+C=\int \frac{d}{dx}f(x)dx$$

알 아 보 기 / 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알아보자.

미분법의 공식을 이용하여 부정적분의 성질을 알아보자.
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$$F(x)=\int f(x)dx,\ F'(x)=f(x)$$

$$G(x)=\int g(x)dx,\ G'(x)=g(x)$$

가 성립한다.

$y=kf(x)$이면 $y'=kf'(x)$

k를 상수라고 하면 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$kF(x)=\int kf(x)dx$$

이때, $kF(x)=k\int f(x)dx$이므로

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

$y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

또 $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$F(x)+G(x)=\int \{f(x)+g(x)\}dx$$

이때, $F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$이므로

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

일반적으로 다음과 같은 부정적분의 성질이 성립한다.

부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

[1] $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

[3] $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

부정적분의 성질 [2], [3]은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

3 부정적분의 성질 [3]을 증명하여라.

알아보기 / 해설

부정적분의 성질과 관련된 각 등식에서는 각 변의 적분상수를 적절히 정할 수 있을 때, 그 등식이 성립한다는 것을 의미한다.
부정적분의 성질 [1]에서 $k=0$인 경우에는 다음을 얻는다.

$$(\text{좌변})=\int 0f(x)dx$$
$$=\int 0\,dx=C$$
$$(\text{우변})=0\int f(x)dx=0$$

여기서 좌변과 우변은 상수만큼만 차이가 있으므로 $k=0$일 때, 부정적분의 성질 [1]이 성립한다.
또 부정적분의 성질 [3]에서도 $f(x)=g(x)$인 경우에는

$$(\text{좌변})=\int \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int 0\,dx=C$$
$$(\text{우변})=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$
$$=C_1-C_2$$

이므로 좌변과 우변은 상수만큼만 차이가 있다.
따라서 $f(x)=g(x)$일 때, 부정적분의 성질 [3]이 성립한다.

스스로 하기 / 풀이

3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$F(x)=\int f(x)dx$이므로 $F'(x)=f(x)$

$G(x)=\int g(x)dx$이므로 $G'(x)=g(x)$

또

$$\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)$$
$$=f(x)-g(x)$$

이므로

$$F(x)-G(x)=\int \{f(x)-g(x)\}dx$$

이때,

$$F(x)=\int f(x)dx,\ G(x)=\int g(x)dx$$

이므로

$$\int \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

02 다항함수의 부정적분

탐 구 하 기 / 다항함수의 도함수

다음 표는 함수 $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$과 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$		$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$F'(x)=f(x)$	1	x			x^4	$\cdots$	

알 아 보 기 / x^n의 부정적분을 구하여 보자.

x를 미분하면 1, $\frac{1}{2}x^2$을 미분하면 x, $\frac{1}{3}x^3$을 미분하면 x^2이다.

일반적으로 n이 음이 아닌 정수일 때

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$$

이 성립하므로 x^n의 부정적분은 다음과 같다.

$x^0=1$로 생각한다. 즉, $n=0$일 때 $\int x^0dx=\int 1dx=x+C$

x^n의 부정적분

n이 음이 아닌 정수일 때

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

| 보기 | (1) $\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$

(2) $\int x^2dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+C=\frac{1}{3}x^3+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^3dx$ (2) $\int x^4dx$ (3) $\int x^6dx$

탐구하기 / 풀이

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=x^3$$

$$\left(\frac{1}{5}x^5\right)'=x^4$$

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$$

따라서 빈칸에 알맞은 것을 써넣으면 다음 표와 같다.

$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$
$F'(x)=f(x)$	1	x	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x^3}$
$F(x)$	$\boldsymbol{\frac{1}{5}x^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	
$F'(x)=f(x)$	x^4	$\cdots$	x^n	

알아보기 / 해설

n이 음이 아닌 정수일 때,

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n$$
$$=x^n$$

이므로

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

(단, C는 적분상수)

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\int x^3dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{4}x^4+C}$

(2) $\int x^4dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{5}x^5+C}$

(3) $\int x^6dx=\frac{1}{6+1}x^{6+1}+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{7}x^7+C}$

Plus 문제

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^{11}dx$ (2) $\int t^3dt$

| 풀이 |

(1) $\int x^{11}dx=\frac{1}{11+1}x^{11+1}+C=\boldsymbol{\frac{1}{12}x^{12}+C}$

(2) $\int t^3dt=\frac{1}{3+1}t^{3+1}+C=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^4+C}$

17

함 께 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(5x^2-2x+1)dx$　　(2) $\int(x+1)(x-2)dx$

풀이

(1) $\int(5x^2-2x+1)dx=5\int x^2dx-2\int xdx+\int 1dx$

$=5\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)+(x+C_3)$

$=\frac{5}{3}x^3-x^2+x+(5C_1-2C_2+C_3)$

여기서 $5C_1-2C_2+C_3$을 C로 놓으면

$\int(5x^2-2x+1)dx=\boldsymbol{\frac{5}{3}x^3-x^2+x+C}$

적분상수가 여러 개 있는 경우에는 이들을 묶어서 마지막에 적분상수 C 하나로만 나타낸다.

(2) $\int(x+1)(x-2)dx=\int(x^2-x-2)dx$

$=\int x^2dx-\int xdx-\int 2dx$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C}$

2 $F'(x)=2x+3$, $F(0)=2$를 만족시키는 함수 $F(x)$를 구하여라.

풀이

$F'(x)=2x+3$이므로　$F(x)=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$

$F(0)=2$이므로　$F(0)=0^2+0+C=2$, 즉 $C=2$

$\therefore$ $\boldsymbol{F(x)=x^2+3x+2}$

$F(0)=2$로부터 적분상수 C의 값을 구할 수 있다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(6x^2+2x-3)dx$　　(2) $\int(x-1)(2x+1)dx$

3 다음 조건을 만족시키는 함수 $F(x)$를 구하여라.

$F'(x)=-3x^2+4x-2$, $F(1)=0$

함께하기 / 해설

1 (2) $\int x^2dx-\int xdx-\int 2dx$를 계산할 때, 적분상수를 2개 이상 사용하여

$$\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(2x+C_3)$$

과 같이 나타낼 수도 있지만 다음과 같이 계산 과정 중에는 적분상수를 생략하고 하나의 적분상수 C를 써서

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

로 나타낸다.

일반적으로 적분상수는 마지막에 한 번만 나타낸다.

스스로 하기 / 풀이

2 (1) $\int(6x^2+2x-3)dx$

$=6\int x^2dx+2\int xdx-\int 3dx$

$=6\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(3x+C_3)$

$=2x^3+x^2-3x+(6C_1+2C_2-C_3)$

여기서 $6C_1+2C_2-C_3$을 C로 놓으면

$\int(6x^2+2x-3)dx$

$=\boldsymbol{2x^3+x^2-3x+C}$

(2) $\int(x-1)(2x+1)dx$

$=\int(2x^2-x-1)dx$

$=2\int x^2dx-\int xdx-\int 1dx$

$=\boldsymbol{\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C}$

3 $F'(x)=-3x^2+4x-2$이므로

$F(x)=\int(-3x^2+4x-2)dx$

$=-3\int x^2dx+4\int xdx-\int 2dx$

$=-x^3+2x^2-2x+C$

$F(1)=0$이므로

$F(1)=-1+2-2+C=0$

$\therefore$ $C=1$

$\therefore$ $\boldsymbol{F(x)=-x^3+2x^2-2x+1}$

03 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

탐 구 하 기 / 함수의 도함수

다음 표는 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$f(x)$	$\sqrt{x}$	$x^{\sqrt{2}}$	$\ln x$	$\ln(-x)$
$f'(x)$				

알 아 보 기 / 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구하여 보자.

미분법을 역으로 이용하면 주어진 함수의 부정적분을 구할 수 있다.
일반적으로 임의의 실수 n에 대하여

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n\ (n\neq-1),\ (\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

이 성립하므로 x^n의 부정적분은 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

(1) $n\neq-1$일 때, $\displaystyle\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $n=-1$일 때, $\displaystyle\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

| 보기 | (1) $\displaystyle\int x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1}+C=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{2}{x}dx=2\int\frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{3}{x}dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}dx$

탐구하기 / 풀이

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(x^{\sqrt{2}})'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$
$$\{\ln(-x)\}'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'$$
$$=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

따라서 빈칸에 알맞은 것을 써넣으면 다음 표와 같다.

$f(x)$	$\sqrt{x}$	$x^{\sqrt{2}}$	$\ln x$	$\ln(-x)$
$f'(x)$	$\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$\mathbf{\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}}$	$\mathbf{\frac{1}{x}}$	$\mathbf{\frac{1}{x}}$

알아보기 / 해설

(ⅰ) $\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$이므로 $x>0$의 구간에서

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$$

(ⅱ) $\dfrac{d}{dx}\ln(-x)=\dfrac{1}{x}$ $(x<0)$이므로 $x<0$의 구간에서

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln(-x)+C$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

(단, C는 적분상수)

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx$
$$=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$$
$$=-x^{-1}+C$$
$$=\mathbf{-\frac{1}{x}+C}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{3}{x}dx=3\int\frac{1}{x}dx$
$$=\mathbf{3\ln|x|+C}$$

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}dx$
$$=\int(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$
$$=\mathbf{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C}$$

보충 학습

- 삼각함수의 부정적분에서는 삼각함수 사이의 관계나 삼각함수의 배각의 공식과 반각의 공식을 활용하여 함수를 변형한 후 부정적분을 구하면 편리한 경우가 많다.
- 삼각함수의 배각의 공식

(1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

(2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - 2\sin^2 x$

(3) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

- 삼각함수의 반각의 공식

(1) $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$

(2) $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$

(3) $\tan^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

04 삼각함수의 부정적분

알 아 보 기 / 삼각함수의 부정적분을 구하여 보자.

삼각함수의 미분법에서 다음을 알 수 있다.

$(\cos x)' = -\sin x,\ (\sin x)' = \cos x$

$(\tan x)' = \sec^2 x,\ (\cot x)' = -\mathrm{cosec}^2 x$

그러므로 삼각함수의 부정적분은 다음과 같다.

삼각함수의 부정적분

(1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(3) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ (4) $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

$1+\cot^2 x = \mathrm{cosec}^2 x$

| 보기 | (1) $\int \cot^2 x\,dx = \int (\mathrm{cosec}^2 x - 1)\,dx$
$= \int \mathrm{cosec}^2 x\,dx - \int dx$
$= -\cot x - x + C$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

(2) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx$
$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right) dx$
$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$
$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (\sin x + 3\cos x)\,dx$ (2) $\int \tan^2 x\,dx$

(3) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$ (4) $\int \frac{\sin^3 x + 2}{\sin^2 x}\,dx$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\int (\sin x + 3\cos x)\,dx$
$= \int \sin x\,dx + 3\int \cos x\,dx$
$= \mathbf{-\cos x + 3\sin x + C}$

(2) $\int \tan^2 x\,dx$
$= \int (\sec^2 x - 1)\,dx$
$= \int \sec^2 x\,dx - \int 1\,dx$
$= \mathbf{\tan x - x + C}$

(3) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$
$= \int \frac{1-\cos x}{2}\,dx$
$= \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$
$= \mathbf{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C}$

(4) $\int \frac{\sin^3 x + 2}{\sin^2 x}\,dx$
$= \int (\sin x + 2\,\mathrm{cosec}^2 x)\,dx$
$= \int \sin x\,dx + 2\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx$
$= \mathbf{-\cos x - 2\cot x + C}$

20

05 지수함수의 부정적분

탐 구 하 기 / 지수함수의 도함수

다음 표는 지수함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$f(x)$	e^x	2^x	3^x
$f'(x)$			

알 아 보 기 / 지수함수의 부정적분을 구하여 보자.

지수함수의 미분법에서 다음을 알 수 있다.

$$(e^x)'=e^x,\ (a^x)'=a^x\ln a\ (\text{단, } a>0,\ a\neq1)$$

그러므로 지수함수의 부정적분은 다음과 같다.

지수함수의 부정적분

(1) $\int e^x dx=e^x+C$

(2) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

| 보기 | (1) $\int e^{x+2}dx=e^2\int e^x dx=e^2\cdot e^x+C=e^{x+2}+C$

(2) $\int 2^{x-1}dx=\dfrac{1}{2}\int 2^x dx=\dfrac{2^x}{2\ln 2}+C=\dfrac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (e^x-\sin x)dx$ (2) $\int \dfrac{x\cdot 2^x-3}{x}dx$

(3) $\int (e^{x-1}+3^{x+2})dx$ (4) $\int (3^x+1)^2 dx$

탐구하기 / 풀이

$(e^x)'=e^x$

$(2^x)'=2^x\ln 2$

$(3^x)'=3^x\ln 3$

따라서 빈칸에 알맞은 것을 써넣으면 다음 표와 같다.

$f(x)$	e^x	2^x	3^x
$f'(x)$	$\boldsymbol{e^x}$	$\boldsymbol{2^x\ln 2}$	$\boldsymbol{3^x\ln 3}$

알아보기 / 해설

지수함수의 부정적분을 구할 때에는 먼저 지수법칙을 이용하여 주어진 지수함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한 다음 적분한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\int (e^x-\sin x)dx$

$$=\int e^x dx-\int \sin x\,dx$$

$$=\boldsymbol{e^x+\cos x+C}$$

(2) $\int \dfrac{x\cdot 2^x-3}{x}dx$

$$=\int 2^x dx-3\int \frac{1}{x}dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{2^x}{\ln 2}-3\ln|x|+C}$$

(3) $\int (e^{x-1}+3^{x+2})dx$

$$=\frac{1}{e}\int e^x dx+9\int 3^x dx$$

$$=\frac{e^x}{e}+\frac{9\cdot 3^x}{\ln 3}+C$$

$$=\boldsymbol{e^{x-1}+\frac{3^{x+2}}{\ln 3}+C}$$

(4) $\int (3^x+1)^2 dx$

$$=\int (3^{2x}+2\cdot 3^x+1)dx$$

$$=\int 9^x dx+2\int 3^x dx+\int 1\,dx$$

$$=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C}$$

보충 학습

합성함수의 미분법의 역과정으로서 다음과 같은 꼴의 부정적분도 구할 수 있다.

(1) $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=e^{f(x)}+C$

(2) $\int a^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)dx=a^{f(x)}+C$

(3) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

(4) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}dx=\log_a|f(x)|+C$

소단원의 학습 목표

1. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
2. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

치환적분법, 부분적분법

2 치환적분법과 부분적분법

학습 목표
- 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / **거꾸로 생각하여 해결하기**

인수분해는 다음과 같이 식을 전개하는 과정을 거꾸로 하는 것이다.

$$(a-b)(a+b)=a(a+b)-b(a+b)$$
$$=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2$$

그런데 복잡한 식은 인수분해하는 것이 쉽지 않기 때문에 치환하는 방법 등을 이용하여 해결한다.

적분법에서도 복잡한 식을 적분할 때 치환하는 방법이나 일부분을 나누는 방법 등을 이용한다.

다가서기 / 해설

부정적분은 미분법의 역연산이다.

$(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

이제 어떤 함수를 미분하면 탄젠트 함수가 되는지 구하여 보자.

미분하여 탄젠트 함수가 되는 함수를 구하는 것은 탄젠트 함수의 부정적분을 구하는 것과 같다. 즉,

$$\int \tan x\,dx$$

를 구하는 것이다. 그런데 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\cos x=t$라 하고 양변을 t에 대하여 미분하면

$-\sin x\dfrac{dx}{dt}=1$이므로

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\int \frac{1}{t}\cdot(-1)\,dt$$
$$=-\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$=-\ln|t|+C$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

$$\therefore \int \tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C$$

따라서 함수 $y=-\ln|\cos x|+C$를 미분하면 탄젠트 함수가 된다.

이와 같이 부정적분을 구하기 힘든 복잡한 함수는 치환적분법을 이용하여 구할 수 있다.

22

01 치환적분법

탐 구 하 기 / 거듭제곱의 부정적분

다음 부정적분을 구하여 보자.

1. $\int (2x+1)^2\,dx$　　　2. $\int (2x+1)^3\,dx$

알 아 보 기 / 치환적분법에 대하여 알아보고, 간단한 식을 치환하여 부정적분을 구하여 보자.

부정적분의 성질만을 이용하여 $\int (2x+1)^{10}dx$와 같은 부정적분을 구하는 것은 어렵다. 이와 같은 경우 적분하려는 식의 일부 또는 전체를 새로운 변수로 바꾸어 놓고 적분하면 편리하다.

이를테면 부정적분 $F(x)=\int f(x)dx$(⋯ ㉠)에서 $x=g(t)$로 놓으면 $F(x)$는 t의 함수, 즉 $F(g(t))$가 된다.

$F(x)=F(g(t))$를 t에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

즉, $F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이처럼 변수 x를 t의 함수 $g(t)$로 바꾸어 적분하는 방법을 **치환적분법**이라고 한다.

합성함수의 미분법
$y=f(u)$, $u=g(x)$이면 $y=f(g(x))$의 도함수는 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

치환적분법
$\int f(x)dx$에서 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면
$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

탐구하기 / 풀이

1. $\int (2x+1)^2dx$

$=\int (4x^2+4x+1)dx$

$=4\int x^2dx+4\int x\,dx+\int 1\,dx$

$=\boldsymbol{\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C}$

| 다른 풀이 |

$\{(2x+1)^3\}'=3(2x+1)^2\cdot 2$

$\qquad\qquad=6(2x+1)^2$

이므로

$\int (2x+1)^2dx$

$=\frac{1}{6}(2x+1)^3+C_0$

$=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+\frac{1}{6}+C_0$

$=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

$\left(단,\ C=\frac{1}{6}+C_0\right)$

2. $\int (2x+1)^3dx$

$=\int (8x^3+12x^2+6x+1)dx$

$=8\int x^3dx+12\int x^2dx+6\int x\,dx$

$\quad+\int 1\,dx$

$=\boldsymbol{2x^4+4x^3+3x^2+x+C}$

| 다른 풀이 |

$\{(2x+1)^4\}'=4(2x+1)^3\cdot 2$

$\qquad\qquad=8(2x+1)^3$

이므로

$\int (2x+1)^3dx$

$=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C_0$

$=2x^4+4x^3+3x^2+x+\frac{1}{8}+C_0$

$=2x^4+4x^3+3x^2+x+C$

$\left(단,\ C=\frac{1}{8}+C_0\right)$

알아보기 / 해설

- 치환적분법은 합성함수의 미분법의 역연산이다.
- 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구할 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓고 변수 x를 변수 t로 치환하여 적분을 하면

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$
$$=\int f(g(t))g'(t)dt$$

- 치환적분법을 이용하여 계산한 결과에서 변수 t를 다시 원래의 변수 x로 치환해야 한다.

23

함께하기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \cos(3x-2)\,dx$ (2) $\int (2x-1)\sqrt{2x+1}\,dx$

(3) $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

풀이

(1) $3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{t+2}{3}$이므로 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$

$\therefore \int \cos(3x-2)\,dx=\int \cos t\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}\int \cos t\,dt$

$=\frac{1}{3}\sin t+C=\mathbf{\frac{1}{3}\sin(3x-2)+C}$

(2) $\sqrt{2x+1}=t$로 놓으면 $x=\frac{t^2-1}{2}$이므로 $\frac{dx}{dt}=t$

$\therefore \int (2x-1)\sqrt{2x+1}\,dx=\int (t^2-2)\cdot t\cdot t\,dt=\int (t^4-2t^2)\,dt$

$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C=\frac{1}{15}t^3(3t^2-10)+C$

$=\mathbf{\frac{1}{15}(6x-7)(2x+1)\sqrt{2x+1}+C}$

부정적분이 $\int f(g(x))g'(x)dx$의 꼴일 때, $g(x)=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

(3) $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x\frac{dx}{dt}=1$

$\therefore \int \cos^3 x\sin x\,dx=\int t^3(-dt)=-\int t^3\,dt$

$=-\frac{1}{4}t^4+C=\mathbf{-\frac{1}{4}\cos^4 x+C}$

스스로 하기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (3x-1)^5\,dx$ (2) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)dx$

(3) $\int \sin^2 3x\,dx$ (4) $\int x\sqrt{1-2x}\,dx$

(5) $\int 2xe^{x^2}\,dx$ (6) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

---

1 (1) $3x-1=t$로 놓으면

$x=\frac{t+1}{3}$이므로 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$

$$\therefore \int (3x-1)^5\,dx$$
$$=\int t^5\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{18}t^6+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{18}(3x-1)^6+C}$$

(2) $\frac{\pi}{4}+2x=t$로 놓으면

$x=\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}$이므로 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

$$\therefore \int \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)dx$$
$$=\int \sin t\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\cos t+C$$
$$=\mathbf{-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)+C}$$

(3) $\int \sin^2 3x\,dx$

$$=\int \frac{1-\cos 6x}{2}\,dx$$

$6x=t$로 놓으면 $x=\frac{t}{6}$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{6}$

$$\therefore \int \frac{1-\cos 6x}{2}\,dx$$
$$=\int \frac{1}{2}\,dx-\frac{1}{2}\int \cos 6x\,dx$$
$$=\int \frac{1}{2}\,dx-\frac{1}{2}\int \cos t\cdot\frac{1}{6}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin t+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C}$$

(4) $\sqrt{1-2x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1-t^2}{2}$이므로

$\frac{dx}{dt}=-t$

$$\therefore \int x\sqrt{1-2x}\,dx$$
$$=\int \frac{1-t^2}{2}\cdot t\cdot(-t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int (t^4-t^2)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C$$
$$=\frac{1}{30}t^3(3t^2-5)+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{1-2x}+C}$$

(5) $x^2=t$로 놓으면 $2x\frac{dx}{dt}=1$

$$\therefore \int 2xe^{x^2}\,dx=\int e^t\,dt$$
$$=e^t+C=\mathbf{e^{x^2}+C}$$

알 아 보 기 / $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 구하여 보자.

부정적분 $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$를 구하는 방법을 알아보자.

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=\int\frac{1}{t}dt$$
$$=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

그러므로 다음이 성립한다.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

분모의 도함수를 구하여 분자와 비교하여 보자.

| 보기 | (1) $\displaystyle\int\frac{4x+6}{x^2+3x-2}dx$에서 $(x^2+3x-2)'=2x+3$이므로

$$\int\frac{4x+6}{x^2+3x-2}dx=2\int\frac{2x+3}{x^2+3x-2}dx$$
$$=2\int\frac{(x^2+3x-2)'}{x^2+3x-2}dx$$
$$=2\ln|x^2+3x-2|+C$$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$에서 $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=\ln(e^x+e^{-x})+C$$

$e^x+e^{-x}>0$이므로 $\ln|e^x+e^{-x}|=\ln(e^x+e^{-x})$

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int\tan x\,dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{1}{x\ln x}dx$

(6) $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\therefore\int\sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{3}\sin^3 x+C}$$

보충 학습

1. 피적분함수가 $\sqrt[n]{ax+b}$의 꼴을 포함하면 $t=\sqrt[n]{ax+b}$로 치환하여 적분한다.

2. $\displaystyle\int\sin^n x\,dx$, $\displaystyle\int\cos^n x\,dx$ 꼴의 부정적분은

(1) n이 양의 홀수일 때
$\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 $\sin x$ 또는 $\cos x$ 중 어느 하나를 변형한 후 부정적분을 구한다.

(2) n이 양의 짝수일 때
삼각함수의 반각의 공식을 사용하여 식을 변형한 후 부정적분을 구한다.

스스로 하기 / 풀이

2 (1) $(x^3-2x+3)'=3x^2-2$이므로

$$\int\frac{3x-2}{x^3-2x+3}dx$$
$$=\int\frac{(x^3-2x+3)'}{x^3-2x+3}dx$$
$$=\mathbf{\ln|x^3-2x+3|+C}$$

(2) $(e^x-1)'=e^x$이므로

$$\int\frac{e^x}{e^x-1}dx$$
$$=\int\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}dx$$
$$=\mathbf{\ln|e^x-1|+C}$$

(3) $\displaystyle\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx$$
$$=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=\mathbf{-\ln|\cos x|+C}$$

(4) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx$$
$$=\mathbf{\ln|\ln x|+C}$$

25

알 아 보 기 / 분수함수의 부정적분을 구하여 보자.

분수함수의 부정적분을 구할 때 분자의 차수가 분모의 차수보다 높은 경우에는 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지를 분리하여 적분한다.

또 분모가 인수분해 되는 경우에는 주어진 분수식을 간단한 분수식의 합의 꼴로 변형하여 구한다.

| 보기 | (1) $\int \frac{2x^2-3x-1}{x-2}dx$에서 $2x^2-3x-1$을 $x-2$로 나눈 몫은 $2x+1$이고 나머지는 1이므로

$$\int \frac{2x^2-3x-1}{x-2}dx=\int\left(2x+1+\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=x^2+x+\ln|x-2|+C$$

(2) $\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}dx$에서

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{m}{x-2}+\frac{n}{x+1}$$

으로 놓고 양변에 $(x-2)(x+1)$을 곱하여 정리하면

$$x-1=(m+n)x+(m-2n)$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$$m+n=1,\ m-2n=-1$$
$$\therefore m=\frac{1}{3},\ n=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 부정적분은

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+1|+C$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

3 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{2x^2-3x-4}{x+1}dx$　　(2) $\int \frac{x+2}{(x+3)(x-1)}dx$

알아보기 / 해설

분수함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$를 적절히 변형함으로써 부정적분을 쉽게 구할 수 있다.

(1) $f'(x)=g(x)$일 때

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$를 이용하여 부정적분을 구한다.

예를 들어

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|+C$$

(2) $f'(x)\neq g(x)$일 때

주어진 분수함수를 몫과 나머지의 꼴로 나타내거나 $\frac{1}{ax+b}$ 꼴의 합으로 변형하여 부정적분을 구한다.

예를 들어 $\int \frac{x}{(x-3)^2}dx$를 구하여 보자.

$$\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{1}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$$

이므로

$$\int \frac{x}{(x-3)^2}dx=\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{3}{(x-3)^2}dx$$
$$=\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C$$

스스로 하기 / 풀이

3 (1) $2x^2-3x-4$를 $x+1$로 나눈 몫은 $2x-5$이고 나머지는 1이므로

$$\int \frac{2x^2-3x-4}{x+1}dx$$
$$=\int\left(2x-5+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\boldsymbol{x^2-5x+\ln|x+1|+C}$$

(2) $\frac{x+2}{(x+3)(x-1)}=\frac{m}{x+3}+\frac{n}{x-1}$으로 놓고 양변에 $(x+3)(x-1)$을 곱하여 정리하면

$$x+2=(m+n)x+(-m+3n)$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$$m+n=1,\ -m+3n=2$$
$$\therefore m=\frac{1}{4},\ n=\frac{3}{4}$$

따라서 구하는 부정적분은

$$\int \frac{x+2}{(x+3)(x-1)}dx$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}\right)dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\ln|x+3|+\frac{3}{4}\ln|x-1|+C}$$

02 부분적분법

탐구하기 / 곱의 미분법

다음 함수 $f(x)g(x)$를 미분하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$f(x)g(x)$	xe^x	$x\sin x$	$x\ln x$
$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$			

알아보기 / 부분적분법에 대하여 알아보자.

x와 $\cos x$의 곱 $x\cos x$의 부정적분을 구하여 보자.

$(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$이므로 이 식의 양변을 적분하면

$$x\sin x=\int(\sin x+x\cos x)dx=\int\sin x\,dx+\int x\cos x\,dx$$

$$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

일반적으로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$를 미분하면

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 이 식의 양변을 적분하면

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$$

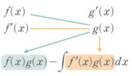
$$\therefore \int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

즉, $\int f'(x)g(x)dx$를 구할 수 있으면 $\int f(x)g'(x)dx$를 구할 수 있다.

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**이라고 한다.

$\int f'(x)g(x)dx$를 쉽게 계산할 수 있도록 $f(x)$, $g(x)$를 정한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

탐구하기 / 풀이

$(xe^x)'=x'e^x+x(e^x)'$
$=e^x+xe^x$
$=(1+x)e^x$

$(x\sin x)'=x'\sin x+x(\sin x)'$
$=\sin x+x\cos x$

$(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'$
$=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}$
$=\ln x+1$

따라서 빈칸에 알맞은 것을 써넣으면 다음 표와 같다.

$f(x)g(x)$	xe^x	$x\sin x$	$x\ln x$
$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$(1+x)e^x$	$\sin x+x\cos x$	$\ln x+1$

익힘책 코너

개념 넓히기_ 18쪽

부분적분법

$$\int f(x)g'(x)dx$$
$$=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

를 적용하기 위해서는 피적분함수에서 무엇을 $f(x)$, $g'(x)$로 놓느냐를 판단하는 일이 중요하다. 이것에 따라 우변의 풀이가 간단해지기도 하고 복잡해지기도 하기 때문이다. 즉, 우변의 $\int f'(x)g(x)dx$가 쉽게 적분할 수 있는 꼴로 나타내어져야 한다. 일반적으로 미분하면 간단한 꼴로 변하는 함수를 $f(x)$, 적분하기 쉬운 함수를 $g'(x)$로 놓는다.

(1) 다항함수와 삼각함수의 곱일 때, 다항함수를 $f(x)$, 삼각함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

(2) 다항함수와 지수함수의 곱일 때, 다항함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

(3) 다항함수와 로그함수의 곱일 때, 로그함수를 $f(x)$, 다항함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

(4) 삼각함수와 지수함수의 곱일 때, 삼각함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

(1)~(4)를 정리하면 다음 그림과 같다.

$f(x) \longleftrightarrow g'(x)$

로그함수　다항함수　삼각함수　지수함수

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f(x)=x,\ g'(x)=3e^{3x}$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=e^{3x}$

$$\int 3xe^{3x}dx=xe^{3x}-\int e^{3x}dx$$
$$=xe^{3x}-\frac{1}{3}e^{3x}+C$$
$$=\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{3x}+C}$$

(2) $f(x)=2x,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2,\ g(x)=-\cos x$

$$\int 2x\sin x\,dx$$
$$=-2x\cos x+\int 2\cos x\,dx$$
$$=\boldsymbol{-2x\cos x+2\sin x+C}$$

(3) $f(x)=\ln x,\ g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\int x\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C}$$

(4) $f(x)=\ln(2x+3),\ g'(x)=2$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2}{2x+3},\ g(x)=2x$

$$\int 2\ln(2x+3)dx$$
$$=2x\ln(2x+3)-\int\frac{4x}{2x+3}dx$$
$$=2x\ln(2x+3)-\int\left(2-\frac{6}{2x+3}\right)dx$$
$$=\boldsymbol{2x\ln(2x+3)-2x+3\ln(2x+3)+C}$$

27

함 께 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int xe^x\,dx$ (2) $\int \ln x\,dx$

풀이

피적분함수가 (다항함수)×(지수함수)일 때, 다항함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓는다.

(1) $f(x)=x,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=1,\ g(x)=e^x$

$$\therefore \int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=\boldsymbol{xe^x-e^x+C}$$

피적분함수가 (다항함수)×(로그함수)일 때, 로그함수를 $f(x)$, 다항함수를 $g'(x)$로 놓는다.

(2) $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=\boldsymbol{x\ln x-x+C}$$

2 부정적분 $\int x^2e^x\,dx$를 구하여라.

풀이

부분적분법을 두 번 적용한다.

$f(x)=x^2,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=2x,\ g(x)=e^x$

$$\therefore \int x^2e^x\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx$$
$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)$$
$$=\boldsymbol{x^2e^x-2xe^x+2e^x+C}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 19쪽 | 익힘책 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3xe^{3x}\,dx$ (2) $\int 2x\sin x\,dx$

(3) $\int x\ln x\,dx$ (4) $\int 2\ln(2x+3)dx$

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^2\sin x\,dx$ (2) $\int (\ln x)^2\,dx$

2 (1) $\int x^2\sin x\,dx$

$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x-\int 2\sin x\,dx$$
$$=\boldsymbol{-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C}$$

(2) $\int (\ln x)^2dx$

$$=x(\ln x)^2-\int 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-\int 2\ln x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-\left(2x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot 2x\,dx\right)$$
$$=\boldsymbol{x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C}$$

28

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
부정적분, 피적분함수, 적분상수, 치환적분법, 부분적분법, $\int f(x)dx$

1. 부정적분

$y=x^n$의 부정적분

계산

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(x+1)(x+2)dx$　(2) $\int\frac{x^2-2x-1}{x^3}dx$

(3) $\int\frac{2x^2-3}{x^2}dx$　(4) $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

삼각함수와 지수함수의 부정적분

계산

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(2\sin x-\cos x)dx$　(2) $\int(2^x-1)dx$

(3) $\int(3e^x-2^x)dx$　(4) $\int(\sec^2 x-\cos^2 x)dx$

치환적분법

이해

3 치환적분법을 이용하여 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(2x-5)^4dx$　(2) $\int x\sqrt{3x-2}\,dx$

부분적분법

이해

4 부분적분법을 이용하여 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int xe^{2x}dx$　(2) $\int(2x+1)\cos x\,dx$

종소리의 크기

문제 해결

5 어떤 종을 처음에 100 dB(데시벨)의 크기로 타종한 후 t초일 때의 소리의 크기를 $x(t)$ dB이라고 하면 소리의 크기가 줄어드는 속도는

$$x'(t)=-20\cdot e^{-\frac{t}{5}}\ (\text{dB/s})$$

이다. 타종한 후 5초일 때의 소리의 크기를 구하여라.

중단원 확인하기 / 풀이

1 (1) $\int(x+1)(x+2)dx$

$=\int(x^2+3x+2)dx$

$=\mathbf{\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C}$

(2) $\int\frac{x^2-2x-1}{x^3}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

$=\mathbf{\ln|x|+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+C}$

(3) $\int\frac{2x^2-3}{x^2}dx=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx$

$=\mathbf{2x+\frac{3}{x}+C}$

(4) $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

$=\int\frac{x^2-2x+1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$

$=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\mathbf{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C}$

2 (1) $\int(2\sin x-\cos x)dx$

$=\mathbf{-2\cos x-\sin x+C}$

(2) $\int(2^x-1)dx$

$=\mathbf{\frac{2^x}{\ln 2}-x+C}$

(3) $\int(3e^x-2^x)dx$

$=\mathbf{3e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C}$

(4) $\int(\sec^2 x-\cos^2 x)dx$

$=\tan x-\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\mathbf{\tan x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C}$

3 (1) $2x-5=t$로 놓으면 $x=\frac{t+5}{2}$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

$\therefore \int(2x-5)^4dx$

$=\int t^4\cdot\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{10}t^5+C$

$=\mathbf{\frac{1}{10}(2x-5)^5+C}$

(2) $\sqrt{3x-2}=t$로 놓으면 $x=\frac{t^2+2}{3}$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}t$$

$$\therefore \int x\sqrt{3x-2}\,dx$$

$$=\int \frac{1}{3}(t^2+2)\cdot t\cdot \frac{2}{3}t\,dt$$

$$=\int\left(\frac{2}{9}t^4+\frac{4}{9}t^2\right)dt$$

$$=\frac{2}{45}t^5+\frac{4}{27}t^3+C$$

$$=\frac{2}{135}t^3(3t^2+10)+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{135}(9x+4)(3x-2)\sqrt{3x-2}+C}$$

4 (1) $f(x)=x,\ g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$$f'(x)=1,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\therefore \int xe^{2x}dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C}$$

(2) $f(x)=2x+1,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$$f'(x)=2,\ g(x)=\sin x$$

$$\therefore \int(2x+1)\cos x\,dx$$

$$=(2x+1)\sin x-\int 2\sin x\,dx$$

$$=\boldsymbol{(2x+1)\sin x+2\cos x+C}$$

5 $x(t)=\int x'(t)dt$

$$=-\int 20\cdot e^{-\frac{t}{5}}dt$$

$$=-20\cdot(-5)e^{-\frac{t}{5}}+C$$

$$=100e^{-\frac{t}{5}}+C$$

처음에 100 dB의 크기로 타종하였으므로

$x(0)=100$이다.

$x(0)=100+C=100$에서 $\quad C=0$

따라서 타종한 후 5초일 때의 소리의 크기는

$x(5)=100e^{-1}=\boldsymbol{\frac{100}{e}}$ **(dB)**

참고 | 기타의 생산가 구하기

부정적분을 활용하면 실생활의 여러 가지 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

이를테면 다음과 같이 기타의 생산가를 구할 수 있다.

어떤 악기 회사에서 전문가용 기타를 한 달 동안 x대 생산할 때, 고정비용이 4000(천 원)이고, 한계비용 $f'(x)$가 다음과 같다고 한다.

$$f'(x)=0.002x+100(\text{천 원})$$

그러므로 이 회사에서 한 달 동안 x대의 기타를 생산할 때, 전체 생산비용 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\int(0.002x+100)dx$$

$$=0.001x^2+100x+C(\text{천 원})$$

그런데 고정비용이 4000(천 원), 즉

$f(0)=4000$(천 원)이므로 $C=4000$이다.

따라서 전체 생산비용 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=0.001x^2+100x+4000(\text{천 원})$$

한편 x의 여러 가지 값에 대하여 전체 생산비용 $f(x)$와 한 대당 생산가 $\frac{1}{x}f(x)$를 알아보면 다음 표와 같다.

x(대)	1	10	100	1000
$f(x)$(천 원)	4100.001	5000.1	14010	105000
$\frac{1}{x}f(x)$(천 원)	4100.001	500.01	140.1	105

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.228

01 바탕

함수 $f(x)$에 대하여

$$\int f(x)dx=\sin x+\cos x+C$$

일 때, $f(\pi)$의 값은? (단, C는 적분상수)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

02 기본

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $-2x+3$이고 점 $(2,\ 1)$을 지날 때, 이 곡선의 방정식을 구하여라.

03 기본

부정적분 $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$를 구하면? (단, C는 적분상수)

① $-x-8\sqrt{x}-4\ln|x|+C$ ② $-x+8\sqrt{x}-4\ln|x|+C$
③ $x-8\sqrt{x}+4\ln|x|+C$ ④ $x+8\sqrt{x}-4\ln|x|+C$
⑤ $x+8\sqrt{x}+4\ln|x|+C$

04 기본

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$ (2) $\int (2\cot x+3)\sin x\,dx$

(3) $\int (2^x-3^x)dx$ (4) $\int \frac{e^{2x}-4x^2}{e^x+2x}dx$ (단, $x\geq 0$)

05 기본

함수 $f(x)=\int 32\sin^4 x\,dx$에 대하여 $f(\pi)=10\pi$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① π　　② 2π　　③ 3π
④ 4π　　⑤ 5π

06 기본

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x(x^2-1)^5 dx$　　(2) $\int \frac{\ln x}{x(\ln x+1)^2}dx$

(3) $\int \frac{\sin x+1}{x-\cos x}dx$　　(4) $\int \frac{5x+12}{x^2+5x+6}dx$

07 실력

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{4}{x^2-4}$이고, 곡선 $y=f(x)$가 원점과 점 $(1,\ a)$를 지날 때, 상수 a의 값은?

① $\ln\frac{1}{3}$　　② $\ln\frac{1}{2}$　　③ $\ln 2$
④ $\ln 3$　　⑤ $\ln 4$

08 실력

부정적분 $\int e^x \sin x\,dx$를 구하여라.

2 정적분

이 단원을 배우면

- 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 정적분의 뜻을 알 수 있다.
- 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
- 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
2. 정적분의 뜻을 안다.
3. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
4. 정적분의 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

구분구적법, 정적분, $\int_a^b f(x)dx$, 아래끝, 위끝, $\Big[F(x)\Big]_a^b$, 정적분의 기본 정리

30

2 정적분

1 정적분의 뜻과 성질

학습 목표

- 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 정적분의 뜻을 안다.
- 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
- 정적분의 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / **나일 강의 범람과 이집트의 토지 측량**

나일 강 하류에 위치한 이집트는 상습적인 홍수로 인해 상류에 있던 기름진 토사가 하류로 운반되면서 강 주변에 비옥한 평야를 갖게 되었다. 이 때문에 거름을 주지 않고도 농사를 잘 지을 수 있었다고 한다.

그런데 나일 강이 범람하고 나면 침수되어 사라지거나 새로 생겨나는 토지들이 발생하고 기존 토지의 경계선이 없어졌기 때문에 이때마다 땅을 적절하게 재분배할 필요성이 생겼다. 이런 이유로 고대 이집트에서는 다양한 토지 측량술이 발전하였다.

현대에는 토지를 측량하거나 건물의 부피를 구할 때에 적분법이 요긴하게 사용된다.

다가서기 / 해설

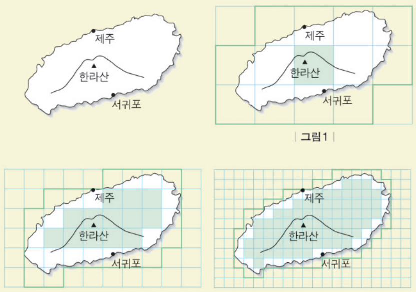
본문의 내용을 통해서 알 수 있듯이 토지의 공정한 분배를 위하여 곡선으로 둘러싸인 지역의 넓이를 구하는 방법이 인간에게 필요하였고, 이것을 계기로 인류 역사에 수학이 발달하게 되었다고 해도 과언이 아닐 것이다. 면적이나 부피를 구하는 방법에 대한 정확한 개념은 좀 더 오랜 시간이 지나고 나서야 확립되었지만 포물선과 현으로 둘러싸인 부분의 넓이를 고대 구적법으로 알려진 실진법을 이용하여 구한 아르키메데스(Archimedes ; B. C. 287～B. C. 212)와 유클리드(Euclid ; ? B. C. 325～? B. C. 265)가 오늘날의 구분구적법과 비슷한 방법으로 평면의 넓이를 구했다는 것에서 이와 같은 개념은 오래전부터 싹텄음을 알 수 있다.
이 구적법은 평면도형의 넓이나 공간도형의 부피 등을 구하는 방법으로 적분의 효시로 꼽힌다. 구적법에 대한 연구는 고대 그리스 시대에서부터 시작됐으며 이것은 지금의 적분학이 발전하는 계기가 되었다고 할 수 있다. 한편 갈릴레이(Galilei, G. ; 1564～1642)의 제자였던 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598～1647)는 그의 저서 '불가분량의 기하학' 에서 주어진 평면도형의 불가분량은 그 도형의 현을 의미하고, 그 평면도형은 그와 같이 평행하게 무한히 많은 불가분량의 집합으로 이루어진 것으로 보았다. 마찬가지로 주어진 입체도형의 불가분량은 그 도형의 단면이고, 그 입체도형은 그와 같이 평행하게 무한히 많은 불가분량의 집합으로 이루어진 것으로 보았다. 그 결과 넓이와 부피를 구하는 '카발리에리의 원리' 를 확립하였다.

31

01 구분구적법

탐구하기 / 제주도의 넓이

제주도의 넓이를 구하기 위하여 아래 그림과 같이 제주도의 축도 위에 한 변의 길이가 각각 1 cm, 0.5 cm, 0.25 cm인 정사각형 모눈을 그렸다.



| 그림1 | | 그림2 | | 그림3 |

다음 물음에 답하여 보자.

1. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형의 개수를 a, 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형의 개수를 b라 하고, 오른쪽 표를 완성하여라.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a			72
b			120

2. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형들의 넓이의 합을 S, 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합을 T라 하고, 오른쪽 표를 완성하여라.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
S			4.5
T			7.5
$T-S$			3

3. 모눈의 한 변의 길이를 0.1 cm, 0.01 cm, …와 같이 점점 작게 할 때, $T-S$의 값은 어떻게 변할지 추측하여라.

탐구하기 / 풀이

1. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형의 개수와 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형의 개수를 조사하여 표를 완성하면 다음과 같다.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a	**1**	**13**	72
b	**13**	**36**	120

2. | **그림1** | 의 한 변의 길이가 1 cm이므로

$S=1\times1\times1=1$

$T=1\times1\times13=13$

$T-S=13-1=12$

| **그림2** | 의 한 변의 길이가 0.5 cm이므로

$S=0.5\times0.5\times13=3.25$

$T=0.5\times0.5\times36=9$

$T-S=9-3.25=5.75$

따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
S	**1**	**3.25**	4.5
T	**13**	**9**	7.5
$T-S$	**12**	**5.75**	3

3. 물음 2의 표에서 | **그림1** |, | **그림2** |, | **그림3** | 으로 갈수록 모눈의 한 변의 길이는 작아지고, $T-S$의 값도 점점 작아진다.

따라서 모눈의 한 변의 길이를 점점 작게 할 때, **$T-S$의 값은 점점 작아지고 0에 가까워진다.**

보충 학습

탐구하기와 같이 도형의 넓이를 모눈을 이용하여 구할 때, 도형 안에 완전히 포함된 정사각형들의 넓이의 합을 S_1, 도형의 경계와 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합을 S_2라고 하면 도형의 넓이 S'은 $S'=S_1+\frac{1}{2}S_2$와 같이 구한다.

이를 이용하여 탐구하기에 주어진 제주도의 넓이를 구하여 보자.

탐구하기에서 도형 안에 포함된 정사각형들의 넓이 S_1은 물음 2의 S이고, 도형의 경계와 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합 S_2는 $T-S$이므로 각 그림에서 제주도의 넓이를 구하면 다음 표와 같다.

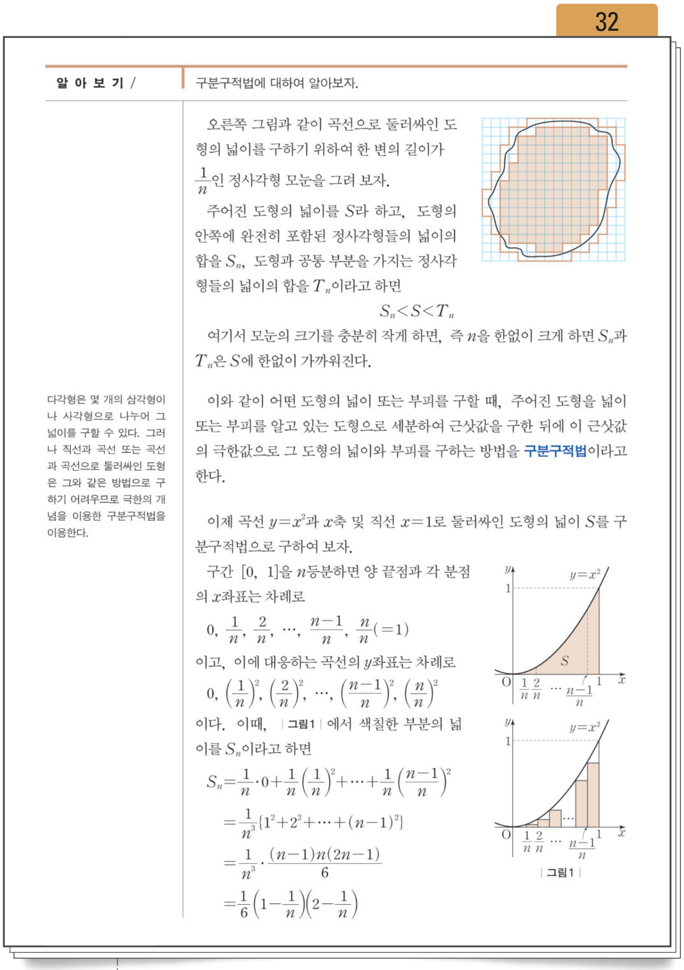
구분	그림 1	그림 2	그림 3
S_1	1	3.25	4.5
S_2	12	5.75	3
S'	7	6.125	6

알아보기 / 해설

구분구적법은 어떤 도형을 몇 개의 작은 도형으로 나누어 나누어진 도형들의 넓이나 부피의 합을 구하고, 나누어진 도형들을 한없이 작게 하여 합의 극한값을 계산하여 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법이다. 따라서 다음과 같이 구분구적법에 의하여 도형의 넓이나 부피를 구한다.

(1) 주어진 도형을 충분히 작은 n개의 기본 도형으로 세분한 다음 이 기본 도형들의 넓이 또는 부피의 합 S_n을 구한다.

(2) (1)에서 구한 근삿값 S_n의 극한 $\lim_{n \to \infty} S_n$을 구하여 구하려는 도형의 넓이 또는 부피 S를 구한다.



32

알 아 보 기 / 구분구적법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하기 위하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형 모눈을 그려 보자.

주어진 도형의 넓이를 S라 하고, 도형의 안쪽에 완전히 포함된 정사각형들의 넓이의 합을 S_n, 도형과 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합을 T_n이라고 하면

$$S_n < S < T_n$$

여기서 모눈의 크기를 충분히 작게 하면, 즉 n을 한없이 크게 하면 S_n과 T_n은 S에 한없이 가까워진다.

다각형은 몇 개의 삼각형이나 사각형으로 나누어 그 넓이를 구할 수 있다. 그러나 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형은 그와 같은 방법으로 구하기 어려우므로 극한의 개념을 이용한 구분구적법을 이용한다.

이와 같이 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 넓이 또는 부피를 알고 있는 도형으로 세분하여 근삿값을 구한 뒤에 이 근삿값의 극한값으로 그 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 한다.

이제 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.

구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}(=1)$$

이고, 이에 대응하는 곡선의 y좌표는 차례로

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

이다. 이때, | 그림1 | 에서 색칠한 부분의 넓이를 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

| 그림1 |

보충 학습

구분구적법으로 도형의 넓이를 구할 때, 반드시 소구간의 끝점에서 함숫값을 생각할 필요는 없다. 즉, 다음과 같은 방법으로 접근하여도 된다.

함수 $y=f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하자. 또 구간 $[a,\ b]$를 n개의 소구간으로 등분하고, 그 등분점을

$$a_0=a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n=b$$

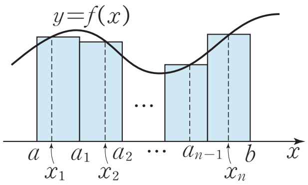
라고 하자. 또 이러한 소구간의 길이를 h라고 하면

$$h=\frac{1}{n}(b-a)$$

이다. 소구간 $[a_{i-1},\ a_i]$의 임의의 값 x_i에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)h$$
$$=f(x_1)h+f(x_2)h+\cdots+f(x_n)h \quad \cdots\cdots ㉠$$

를 생각하면 $f(x)\geq 0$일 때, ㉠은 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 된다.



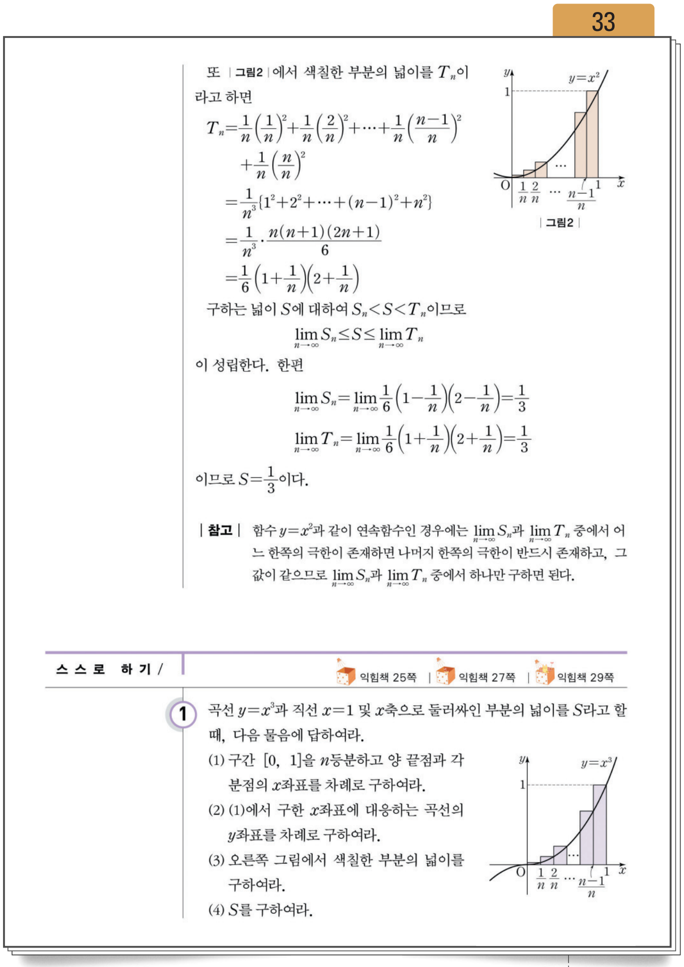
참고 | 구분구적법에 많이 사용하는 공식

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$



33

또 | 그림2 | 에서 색칠한 부분의 넓이를 T_n이라고 하면

$$T_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

| 그림2 |

구하는 넓이 S에 대하여 $S_n<S<T_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n\le S\le\lim_{n\to\infty}T_n$$

이 성립한다. 한편

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

이므로 $S=\frac{1}{3}$이다.

| 참고 | 함수 $y=x^2$과 같이 연속함수인 경우에는 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 어느 한쪽의 극한이 존재하면 나머지 한쪽의 극한이 반드시 존재하고, 그 값이 같으므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 하나만 구하면 된다.

스스로 하기 / 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 곡선 $y=x^3$과 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하고 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 구하여라.

(2) (1)에서 구한 x좌표에 대응하는 곡선의 y좌표를 차례로 구하여라.

(3) 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

(4) S를 구하여라.

알아보기 / 해설

일반적으로 곡선으로 둘러싸인 도형에서 도형 내부로부터의 넓이의 근삿값 S_n과 도형 외부로부터의 넓이의 근삿값 T_n은 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}T_n$$

이 극한값이 바로 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S이다.

즉, 함수 $f(x)$가 연속이면 S_n의 극한값과 T_n의 극한값이 같음이 알려져 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 각 구간의 길이는 $\frac{1}{n}$이므로 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례대로

$$\mathbf{0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}(=1)}$$

(2) $y=x^3$의 x 대신에 (1)에서 구한 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 각각 대입하면 y좌표는 차례대로

$$\mathbf{0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^3,\ \left(\frac{2}{n}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^3,\ \left(\frac{n}{n}\right)^3}$$

(3) 주어진 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 직사각형들의 넓이의 합이므로

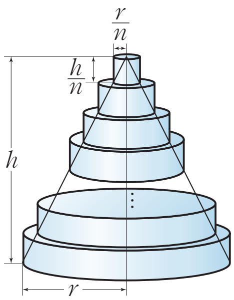
$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{n^4}\{1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3\}$$
$$=\frac{1}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=\mathbf{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

(4) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$$=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

함께하기 / 해설

1 다음 그림과 같이 n개의 원기둥을 만든 후 극한을 이용하여 원뿔의 부피를 구해도 그 결과는 같다.

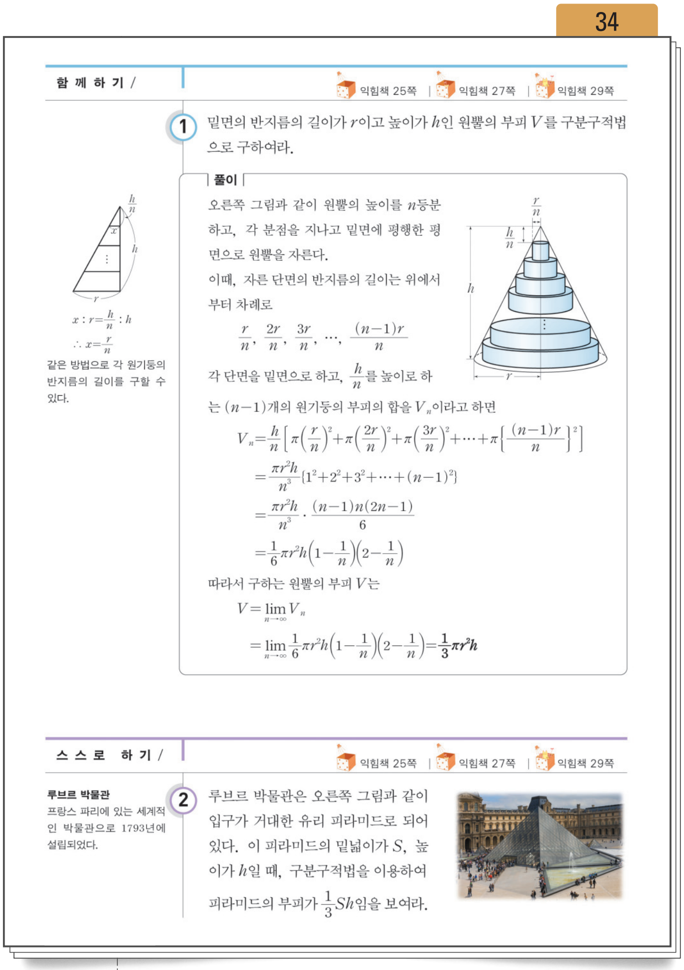


이때, n개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$V_n=\frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

이고 원뿔의 부피 V는

$$\begin{aligned} V&=\lim_{n\to\infty}V_n \\ &=\frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$



함 께 하 기 / 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피 V를 구분구적법으로 구하여라.

$x : r=\frac{h}{n} : h$

$\therefore x=\frac{r}{n}$

같은 방법으로 각 원기둥의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

풀이

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하고, 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자른다.

이때, 자른 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

각 단면을 밑면으로 하고, $\frac{h}{n}$를 높이로 하는 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$\begin{aligned} V_n&=\frac{h}{n}\left[\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\right] \\ &=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &=\frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피 V는

$$\begin{aligned} V&=\lim_{n\to\infty}V_n \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h} \end{aligned}$$

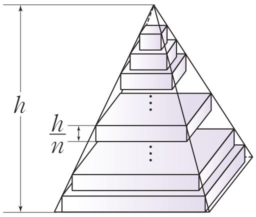
스 스 로 하 기 / 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

루브르 박물관
프랑스 파리에 있는 세계적인 박물관으로 1793년에 설립되었다.

2 루브르 박물관은 오른쪽 그림과 같이 입구가 거대한 유리 피라미드로 되어 있다. 이 피라미드의 밑넓이가 S, 높이가 h일 때, 구분구적법을 이용하여 피라미드의 부피가 $\frac{1}{3}Sh$임을 보여라.

스스로 하기 / 풀이

2 다음 그림과 같이 사각뿔의 높이를 n등분하고, 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 $(n-1)$개의 직육면체를 만든다.



이때, k번째 직육면체의 밑넓이를 S_k라고 하면 $S_k : S=k^2 : n^2$에서

$$S_k=S\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

높이가 $\frac{k}{n}$인 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$\begin{aligned} V_n&=\frac{h}{n}\left\{S\left(\frac{1}{n}\right)^2+S\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+S\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\} \\ &=\frac{Sh}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &=\frac{Sh}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &=\frac{1}{6}Sh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

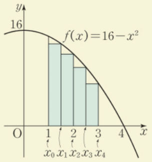
$$\begin{aligned} \therefore V&=\lim_{n\to\infty}V_n \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}Sh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \\ &=\frac{1}{3}Sh \end{aligned}$$

35

02 정적분

탐 구 하 기 / 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 근삿값

오른쪽 그림을 이용하여 함수 $f(x)=16-x^2$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이의 근삿값을 구할 수 있다. 다음의 순서에 의하여 아래의 표에 알맞은 것을 써넣어 보자.



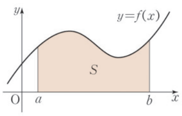
1. 구간 $[1,\ 3]$을 4등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4를 각각 구하여라.
2. $f(x_k)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$의 값을 각각 구하여라.
3. 색칠한 4개의 직사각형의 넓이의 합을 구하여라.

순서 \ k	0	1	2	3	4	합
1. x_k	1	1.5	2		3	
2. $f(x_k)$		13.75				
3. $(x_k-x_{k-1})f(x_k)$						

알 아 보 기 / 정적분의 뜻을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)\geq 0$이라고 하자.

이때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.



구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n(=b)$$

이라 하고, 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이를 Δx라고 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

탐구하기 / 풀이

1. 구간 $[1,\ 3]$을 4등분하면 각 구간의 길이는

$\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$이므로

$x_0=\mathbf{1}$, $x_1=\mathbf{1.5}$, $x_2=\mathbf{2}$, $x_3=\mathbf{2.5}$, $x_4=\mathbf{3}$

2. $f(x_1)=16-1.5^2=\mathbf{13.75}$

$f(x_2)=16-2^2=\mathbf{12}$

$f(x_3)=16-2.5^2=\mathbf{9.75}$

$f(x_4)=16-3^2=\mathbf{7}$

3. $(x_1-x_0)f(x_1)=0.5\times 13.75=6.875$

$(x_2-x_1)f(x_2)=0.5\times 12=6$

$(x_3-x_2)f(x_3)=0.5\times 9.75=4.875$

$(x_4-x_3)f(x_4)=0.5\times 7=3.5$

$\therefore\ 6.875+6+4.875+3.5=\mathbf{21.25}$

순서 \ k	0	1	2	3	4	합
1. x_k	1	1.5	2	**2.5**	3	
2. $f(x_k)$		13.75	**12**	**9.75**	**7**	
3. $(x_k-x_{k-1})f(x_k)$		**6.875**	**6**	**4.875**	**3.5**	**21.25**

참고 | 현대적 의미의 적분법

구적 문제에 극한을 처음으로 도입한 사람은 16세기 스테빈(Stevin, S. ; 1548~1620)이었으며, 한없이 작은 부분이 무수히 많이 모여서 넓이나 부피가 된 것으로 생각한 사람은 케플러(Kepler, J. ; 1571~1630)이었다. 그리고 좀 더 엄밀하게 구적법을 다룬 수학자는 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598~1647)인데 그는 '넓이는 폭이 없는 선의 모임이고, 부피는 두께가 없는 면의 모임'으로 생각하여 '불가분량의 기하'를 저술하기도 했다.

극한 개념을 사용하여 현대적 의미의 적분법을 시도한 사람은 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)이다. 그러나 극한의 개념이 확실하지 않아서 그들의 방법도 직관적인 개념에 머물러 있었으며 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)에 와서야 극한의 엄밀한 정의를 써서 현대적 의미의 적분이 완성되었다.

알아보기 / 해설

연속함수 $f(x)$의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 정의할 때는 구분구적법을 이용하기 위하여 먼저 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq 0$인 경우에 대하여 정의한다.

이때, 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$$

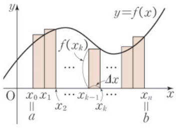
이라 하고, 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$의 길이를 Δx라고 한 후 n개의 직사각형의 넓이의 합 S_n을 이용한다. 즉,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= S \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\end{aligned}$$

그러나 $f(x) \geq 0$인 조건이 없어도 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이기만 하면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$는 존재하므로 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 정의된다.

36

오른쪽 그림과 같이 Δx를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면



$$\begin{aligned}S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots \\ &\quad + f(x_k)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\end{aligned}$$

이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 존재한다.

정적분을 영어로 definite integral이라고 한다.

이때, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 '구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 정적분' 또는 '인티그럴 a부터 b까지 $f(x)dx$' 라고 읽는다.

여기서 a를 정적분의 **아래끝**, b를 **위끝**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 정의

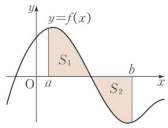
함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

부정적분 $\int f(x)dx$는 함수이지만 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 실수이다.

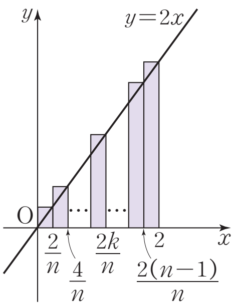
한편 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 양의 값과 음의 값을 모두 가지면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 $f(x)$가 양인 부분의 넓이 S_1에서 $f(x)$가 음인 부분의 넓이 S_2를 뺀 값을 나타낸다.



스스로 하기 / 풀이

1 (1) 아래끝이 0이고 위끝이 2이므로 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$이라고 하면 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이 Δx와 x_k는

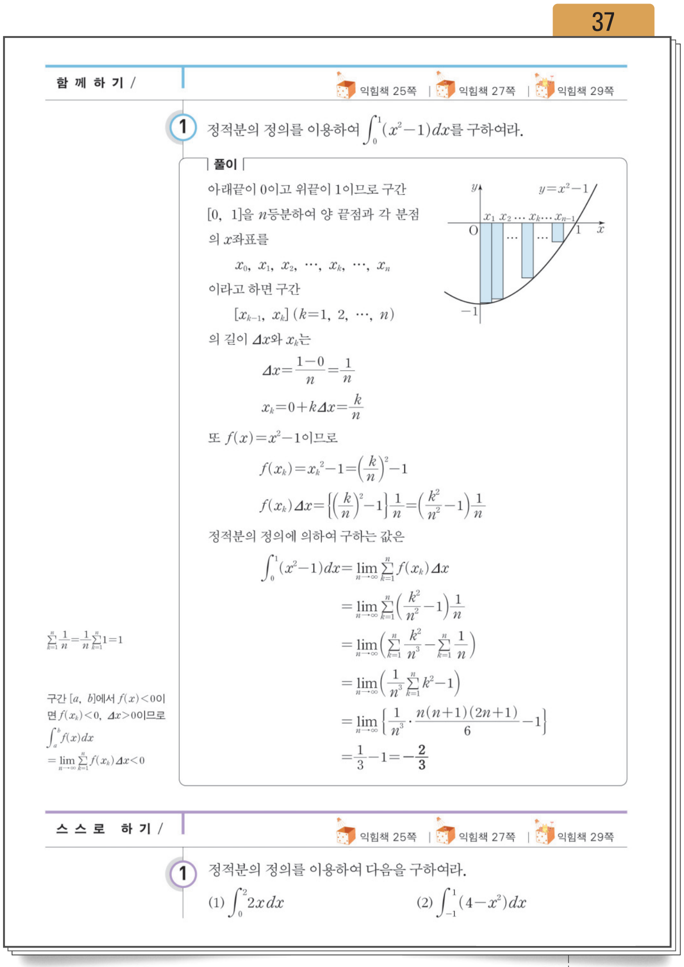
$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n},\ x_k = 0 + k\Delta x = \frac{2k}{n}$$



또 $f(x)=2x$이므로

$$f(x_k) = 2x_k = \frac{4k}{n}$$

$$f(x_k)\Delta x = \frac{4k}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{8k}{n^2}$$



37

함 께 하 기 / 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 정적분의 정의를 이용하여 $\int_0^1 (x^2-1)dx$를 구하여라.

풀이

아래끝이 0이고 위끝이 1이므로 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를

$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$

이라고 하면 구간

$[x_{k-1},\ x_k]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

의 길이 $\varDelta x$와 x_k는

$$\varDelta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_k=0+k\varDelta x=\frac{k}{n}$$

또 $f(x)=x^2-1$이므로

$$f(x_k)=x_k^{\ 2}-1=\left(\frac{k}{n}\right)^2-1$$

$$f(x_k)\varDelta x=\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}=\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{1}{n}$$

정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2-1)dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right\}\\&=\frac{1}{3}-1=-\mathbf{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=1$

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)<0$이면 $f(x_k)<0$, $\varDelta x>0$이므로 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x<0$

스 스 로 하 기 / 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 정적분의 정의를 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $\int_0^2 2x\,dx$ (2) $\int_{-1}^1 (4-x^2)dx$

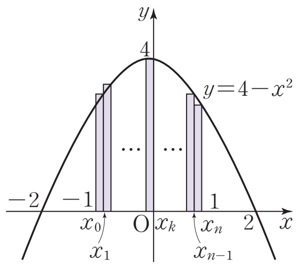
정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned}\int_0^2 2x\,dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\&=\mathbf{4}\end{aligned}$$

(2) 아래끝이 -1이고 위끝이 1이므로 구간 $[-1,\ 1]$을 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$이라고 하면 구간 $[x_{k-1},\ x_k]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이 $\varDelta x$와 x_k는

$$\varDelta x=\frac{1-(-1)}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_k=-1+k\varDelta x=-1+\frac{2k}{n}$$



또 $f(x)=4-x^2$이므로

$$\begin{aligned}f(x_k)&=4-x_k^{\ 2}\\&=4-\left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\\&=3+\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\end{aligned}$$

$$f(x_k)\varDelta x=\left(3+\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}$$

정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 (4-x^2)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{6}{n}\cdot n+\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}\\&=6+4-\frac{8}{3}\\&=\mathbf{\frac{22}{3}}\end{aligned}$$

알아보기 / 해설

적분과 미분과의 관계는 피적분함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여 a에서 x까지 $f(t)$를 정적분하고, 이를 x에 관하여 미분하면 원래의 함수 $f(x)$가 된다는 것이다. 이것은 적분이 미분의 역연산임을 뜻한다.

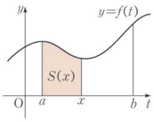
38

03 정적분의 기본 정리

알 아 보 기 / 정적분과 부정적분의 관계를 알아보자.

적분과 미분의 관계, 정적분과 부정적분의 관계를 알아보고, 이를 이용하여 정적분을 간편하게 구하는 방법을 알아보자.

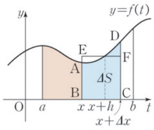
함수 $y=f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$일 때, 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 a에서 x까지의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$\int_a^x f(t)dt$는 x의 값에 따라 변하므로 x의 함수이다.

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

이다. 여기서 x의 증분 $\varDelta x$에 대한 $S(x)$의 증분을 $\varDelta S$라고 하면 오른쪽 그림에서 $\varDelta S$는 도형 ABCD의 넓이이다.



도형 ABCD와 넓이가 같도록 직사각형 EBCF를 만들면 변 EF는 곡선과 만난다.

이때, 교점의 x좌표를 $x+h$라고 하면

$$\varDelta S=f(x+h)\varDelta x \qquad \therefore \frac{\varDelta S}{\varDelta x}=f(x+h)$$

여기서 $0\leq h\leq \varDelta x$이거나 $\varDelta x\leq h\leq 0$이므로 $\varDelta x$의 값이 0에 한없이 가까워지면 h의 값도 0에 한없이 가까워진다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$S'(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta S}{\varDelta x}=\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$$

즉, 넓이를 나타내는 함수 $S(x)$의 도함수는 $f(x)$와 같다.

일반적으로 적분과 미분 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $a\leq x\leq b$일 때

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt\text{이면} \qquad S'(x)=f(x)$$

| 보기 | $\frac{d}{dx}\int_2^x (t^2+3t+2)dt=x^2+3x+2$

보충 학습

1. 정적분과 미분의 관계

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$

(3) $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$

$=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$

2. 정적분과 극한의 관계

(1) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

3. 정적분과 무한급수

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{a}{n}k\right)\cdot\frac{a}{n}=\int_0^a f(x)dx$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b}{n}k\right)\cdot\frac{b}{n}$

$=\int_a^{a+b} f(x)dx$

$=\int_0^b f(a+x)dx$

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

39

앞의 적분과 미분의 관계에서 $S'(x)=f(x)$이므로 $S(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.

여기서 $f(x)$의 또 다른 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$S(x)=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$S(a)$는 a에서 a까지의 넓이이므로 0이다.

한편 $S(x)$의 정의에서 $S(a)=0$이므로 ㉠에 $x=a$를 대입하면

$$S(a)=F(a)+C=0$$

$$\therefore C=-F(a) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

즉

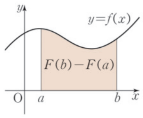
$$\int_a^x f(t)dt=S(x)=F(x)-F(a)$$

이 식의 위끝에 $x=b$를 대입하면

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

또 적분변수 t를 x로 바꾸면 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$



이때, 우변 $F(b)-F(a)$를 기호로

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같은 **정적분의 기본 정리**를 얻는다.

정적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

| 참고 | 정적분의 기본 정리를 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

알아보기 / 해설

• 정적분의 기본 정리는 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 정의를 이용하지 않고서도 쉽게 정적분을 구하는 방법을 알려 준다. 즉, 이 정리는 넓이를 구하기 위하여 부분합을 계산하고 그 극한을 구하는 복잡한 과정을 거치지 않고 미분법의 공식을 역으로 적용하여 부정적분을 구하기만 하면 된다는 것을 보여준다.

• 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 구할 때는 먼저 피적분함수 $f(x)$의 부정적분 $\int f(x)dx=F(x)+C$를 구한 후 정적분의 기본 정리를 이용한다.

• 정적분의 기본 정리를 이용하면

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$이므로

(1) $$\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)$$
$$=0$$

(2) $$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$
$$=-\{F(a)-F(b)\}$$
$$=-\int_b^a f(x)dx$$

가 성립한다.

• 함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ x]$에서 연속이고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면 정적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

가 성립하므로 $\int_a^x f(t)dt$는 x에 대한 함수가 된다.

따라서 함수 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$G'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$
$$=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}$$
$$=F'(x)$$
$$=f(x)$$

즉, $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

스스로 하기 / 풀이

1 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\boldsymbol{f(x)=2x-2}$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로

$0=a^2-2a-8$

$(a+2)(a-4)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{a=4}\ (\because\ a>0)$

2 (1) 1의 한 부정적분이 x이므로

$$\int_1^3 dx=\Big[x\Big]_1^3$$
$$=3-1$$
$$=\boldsymbol{2}$$

(2) $2x$의 한 부정적분이 x^2이므로

$$\int_{-1}^2 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_{-1}^2$$
$$=4-1$$
$$=\boldsymbol{3}$$

(3) $3x^2-4x$의 한 부정적분이 x^3-2x^2이므로

$$\int_{-2}^3 (3x^2-4x)dx$$
$$=\Big[x^3-2x^2\Big]_{-2}^3$$
$$=(27-18)-(-8-8)$$
$$=9+16$$
$$=\boldsymbol{25}$$

(4) $4x^3+3x^2$의 한 부정적분이 x^4+x^3이므로

$$\int_1^0 (4x^3+3x^2)dx$$
$$=-\int_0^1 (4x^3+3x^2)dx$$
$$=-\Big[x^4+x^3\Big]_0^1$$
$$=-\{(1+1)-0\}$$
$$=\boldsymbol{-2}$$

40

함께 하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 임의의 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt=x^2-4x+4$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 a의 값을 구하여라.

적분과 미분의 관계를 이용한다.

| 풀이 |

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\boldsymbol{f(x)=2x-4}$$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt=0$이므로

$$0=a^2-4a+4$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a=2}$$

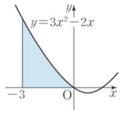
2 정적분 $\int_{-3}^0 (3x^2-2x)dx$를 구하여라.

피적분함수의 부정적분을 먼저 구한다.

| 풀이 |

$3x^2-2x$의 한 부정적분이 x^3-x^2이므로

$$\int_{-3}^0 (3x^2-2x)dx=\Big[x^3-x^2\Big]_{-3}^0$$
$$=0-(-27-9)$$
$$=\boldsymbol{36}$$



스스로 하기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 임의의 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x-8$을 만족시키는 함수 $f(x)$와 양수 a의 값을 구하여라.

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^3 dx$ (2) $\int_{-1}^2 2x\,dx$

(3) $\int_{-2}^3 (3x^2-4x)dx$ (4) $\int_1^0 (4x^3+3x^2)dx$

Plus 문제

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^3 x^2dx$

(2) $\int_{-1}^1 (8x^3-3x^2)dx$

| 풀이 |

(1) x^2의 한 부정적분이 $\frac{1}{3}x^3$이므로

$$\int_0^3 x^2dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3=\boldsymbol{9}$$

(2) $8x^3-3x^2$의 한 부정적분이 $2x^4-x^3$이므로

$$\int_{-1}^1 (8x^3-3x^2)dx=\Big[2x^4-x^3\Big]_{-1}^1$$
$$=(2-1)-(2+1)$$
$$=\boldsymbol{-2}$$

41

04 정적분의 성질

알 아 보 기 / 정적분의 성질을 알아보자.

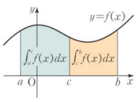
함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $\int kf(x)dx=kF(x)+C$ (k는 상수)이므로

$$\int_a^b kf(x)dx=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)$$
$$=k\{F(b)-F(a)\}=k\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=k\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다. 또 임의의 실수 c에 대하여

$$\int_a^c f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^c=F(c)-F(a)$$
$$\int_c^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_c^b=F(b)-F(c)$$

이므로



$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$
$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다.

일반적으로 다음과 같은 정적분의 성질이 성립한다.

정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

[1] $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

[3] $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

[4] $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

정적분의 성질 [4]는 $a<c<b$가 아닐 때에도 성립한다.

알아보기 / 해설

함수 $f(x)$와 $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$와 $G(x)$라고 하면

[2] $\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C$

이므로

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$$
$$=\Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b$$
$$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$
$$=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

[3] $\int \{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)+C$

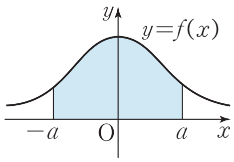
이므로

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\Big[F(x)-G(x)\Big]_a^b$$
$$=\{F(b)-G(b)\}-\{F(a)-G(a)\}$$
$$=\{F(b)-F(a)\}-\{G(b)-G(a)\}$$
$$=\Big[F(x)\Big]_a^b-\Big[G(x)\Big]_a^b$$
$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

보충 학습

1. 우함수와 정적분

$f(-x)=f(x)$를 만족하는 함수를 우함수라 하고 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

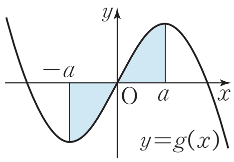


따라서 함수 $f(x)$가 우함수일 때, 우함수는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

2. 기함수와 정적분

$g(-x)=-g(x)$를 만족하는 함수를 기함수라 하고 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



따라서 함수 $g(x)$가 기함수일 때, 기함수는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-a}^a g(x)dx=0$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\int_{1}^{3}(x^2+2x)dx$

$=\int_{1}^{3}x^2dx+\int_{1}^{3}2x\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3+\left[x^2\right]_1^3$

$=\left(9-\frac{1}{3}\right)+(9-1)$

$=\mathbf{\frac{50}{3}}$

(2) $\int_{-1}^{2}(4x^3-3x^2+1)dx$

$-\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2-2x)dx$

$=\int_{-1}^{2}\{(4x^3-3x^2+1)$

$-(4x^3+3x^2-2x)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(-6x^2+2x+1)dx$

$=\int_{-1}^{2}(-6x^2)dx+\int_{-1}^{2}2x\,dx$

$+\int_{-1}^{2}1\,dx$

$=\left[-2x^3\right]_{-1}^2+\left[x^2\right]_{-1}^2+\left[x\right]_{-1}^2$

$=(-16-2)+(4-1)+(2+1)$

$=\mathbf{-12}$

2 (1) $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$=\int_{1}^{4}x^{\frac{1}{2}}dx-\int_{1}^{4}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4-\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$

$=\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)-(4-2)$

$=\mathbf{\frac{8}{3}}$

42

함 께 하 기 / 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{1}(x+1)^3dx-\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx$

(2) $\int_{1}^{3}(3x^2+e^x)dx$

| 풀이 |

(1) $\int_{-2}^{1}(x+1)^3dx-\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx$

$=\int_{-2}^{1}\{(x+1)^3-(x-1)^3\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(6x^2+2)dx=\int_{-2}^{1}6x^2dx+\int_{-2}^{1}2\,dx$

$=\left[2x^3\right]_{-2}^1+\left[2x\right]_{-2}^1$

$=\{2-(-16)\}+\{(2-(-4)\}=\mathbf{24}$

(2) $\int_{1}^{3}(3x^2+e^x)dx$

$=\int_{1}^{3}3x^2\,dx+\int_{1}^{3}e^x\,dx=\left[x^3\right]_1^3+\left[e^x\right]_1^3$

$=(27-1)+(e^3-e)=\mathbf{26+e^3-e}$

$\int_{-2}^{1}(6x^2+2)dx$
$=\left[2x^3+2x\right]_{-2}^1$
로 계산해도 된다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{3}(x^2+2x)dx$

(2) $\int_{-1}^{2}(4x^3-3x^2+1)dx-\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2-2x)dx$

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (2) $\int_{1}^{3}(e^x+e^{-x})^2\,dx$

(3) $\int_{1}^{4}\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2}dx$ (4) $\int_{1}^{2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

(2) $\int_{1}^{3}(e^x+e^{-x})^2dx$

$=\int_{1}^{3}(e^{2x}+2+e^{-2x})dx$

$=\int_{1}^{3}e^{2x}dx+\int_{1}^{3}2\,dx+\int_{1}^{3}e^{-2x}dx$

$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^3+\left[2x\right]_1^3+\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_1^3$

$=\left(\frac{1}{2}e^6-\frac{1}{2}e^2\right)+(6-2)$

$+\left(-\frac{1}{2}e^{-6}+\frac{1}{2}e^{-2}\right)$

$=\mathbf{\frac{1}{2}(e^6-e^{-6})+4-\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})}$

(3) $\int_{1}^{4}\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2}dx$

$=\int_{1}^{4}(3x-2+4x^{-2})dx$

함 께 하 기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

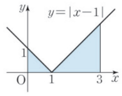
2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^3 |x-1|\,dx$ (2) $\int_0^\pi |\cos x|\,dx$

풀이

(1) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geq 1) \\ -x+1 & (x\leq 1)\end{cases}$$



이므로 구간을 나누어 계산하면

$x\leq 1$일 때
$f(x)=-(x-1)$
$=-x+1$

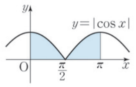
$$\int_0^3 |x-1|\,dx=\int_0^1 (-x+1)dx+\int_1^3 (x-1)dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left\{\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

(2) $\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$

$\cos x\geq 0$, $\cos x\leq 0$인 구간으로 나누어 생각한다.

$0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$일 때, $|\cos x|=\cos x$

$\frac{\pi}{2}\leq x\leq \pi$일 때, $|\cos x|=-\cos x$



따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_0^\pi |\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x)dx$$
$$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi$$
$$=(1-0)+\{0-(-1)\}=\mathbf{2}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽 | 익힘책 29쪽

3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^2 |2x-1|\,dx$ (2) $\int_{-1}^2 |x^2+2x-3|\,dx$

(3) $\int_0^1 |e^x-2|\,dx$ (4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |\sin x|\,dx$

$$=\int_1^4 3x\,dx-\int_1^4 2\,dx+\int_1^4 4x^{-2}dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^4-\left[2x\right]_1^4+\left[-4x^{-1}\right]_1^4$$
$$=\left(24-\frac{3}{2}\right)-(8-2)+(-1+4)$$
$$=\mathbf{\frac{39}{2}}$$

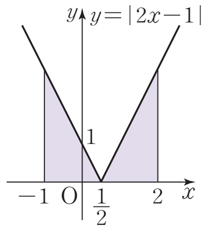
(4) $\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=\int_1^2 1\,dx+\int_1^2 \frac{1}{x}dx+\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$$
$$=\left[x\right]_1^2+\left[\ln|x|\right]_1^2+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$=(2-1)+(\ln 2-0)+\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}+\ln 2}$$

스스로 하기 / 풀이

3 (1) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$$f(x)=|2x-1|$$
$$=\begin{cases} 2x-1 & \left(x\geq\frac{1}{2}\right) \\ -2x+1 & \left(x\leq\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$



따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{-1}^2 |2x-1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2x+1)dx$$
$$+\int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx$$
$$=\left[-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^2$$
$$=\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-(-1-1)\right\}$$
$$+\left\{(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2) $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$

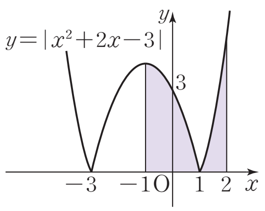
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i) $-1\leq x\leq 1$일 때

$|x^2+2x-3|=-x^2-2x+3$

(ii) $1\leq x\leq 2$일 때

$|x^2+2x-3|=x^2+2x-3$



따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{-1}^{2}|x^2+2x-3|dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+3)dx+\int_{1}^{2}(x^2+2x-3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{1}^{2}$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-\left(\frac{1}{3}-1-3\right)\right\}+\left\{\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{23}{3}}$$

(3) $e^x-2=0$에서

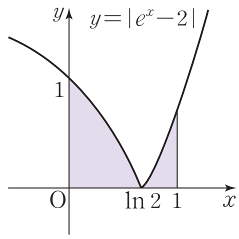
$x=\ln 2$

(i) $0\le x\le \ln 2$일 때

$|e^x-2|=-e^x+2$

(ii) $\ln 2\le x\le 1$일 때

$|e^x-2|=e^x-2$



따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{0}^{1}|e^x-2|dx$$

$$=\int_{0}^{\ln 2}(-e^x+2)dx+\int_{\ln 2}^{1}(e^x-2)dx$$

$$=\left[-e^x+2x\right]_{0}^{\ln 2}+\left[e^x-2x\right]_{\ln 2}^{1}$$

$$=\{(-2+2\ln 2)-(-1+0)\}+\{(e-2)-(2-2\ln 2)\}$$

$$=\boldsymbol{4\ln 2+e-5}$$

(4) $\sin x=0$에서

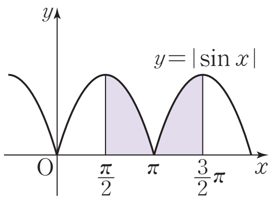
$x=\pi$

(i) $\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$일 때

$|\sin x|=\sin x$

(ii) $\pi\le x\le \frac{3}{2}\pi$일 때

$|\sin x|=-\sin x$



따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin x|dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-\sin x)dx$$

$$=\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left[\cos x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$=(1-0)+\{0-(-1)\}$$

$$=\mathbf{2}$$

참고 | 부정적분과 정적분

부정적분(不定積分)에서 '부정'은 정해지지 않았다는 의미의 한자어이고, 정적분(定積分)에서 '정'은 정해졌다는 의미의 한자어이다. 즉, 부정적분은 그 값이 정해지지 않고, 정적분은 그 값이 정해진다.

44

2 정적분

2 정적분의 치환적분법과 부분적분법

학습 목표
- 정적분의 치환적분법을 이해한다.
- 정적분의 부분적분법을 이해한다.

다 가 서 기 / 된장찌개와 포크

돈가스를 먹을 때에는 포크와 칼을 주로 사용하지만 된장찌개를 먹을 때에는 수저를 사용한다. 이와 같이 정적분에서도 피적분함수 $f(x)$에서 x에 대한 식을 다른 문자로 치환하면 적분하는 구간도 바꾸어야 한다.

소단원의 학습 목표

1. 정적분의 치환적분법을 이해한다.
2. 정적분의 부분적분법을 이해한다.

다가서기 / 해설

돈가스를 먹을 때에 필요한 도구는 포크와 칼이고, 된장찌개를 먹을 때에 필요한 도구는 수저이다.

처음에는 세 학생 모두 돈가스를 먹으려고 했으므로 포크와 칼이 각각 3개씩 필요했지만, 나중에는 두 학생은 돈가스, 한 학생은 된장찌개를 먹으려고 했으므로 포크와 칼이 각각 2개씩, 수저는 1벌이 필요하다.

이와 같이 음식을 먹을 때에는 먹는 음식에 따라서 사용하는 도구가 달라지므로 음식을 바꾸면 도구도 바꾸어야 하는 것처럼 정적분에서도 피적분함수 $f(x)$에서 x에 대한 식을 다른 문자로 치환하면 적분하는 구간도 바꾸어야 한다.

참고 | 정적분과 합성함수

$f(x)=2x\ (3\le x\le 5)$,

$g(x)=2x+1\ (1\le x\le 2)$일 때, 합성함수 $f(g(x))$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(g(x))&=2(2x+1)\\ &=4x+2\ (1\le x\le 2)\end{aligned}$$

$\int_3^5 f(y)dy$와 $\int_1^2 f(g(x))dx$를 구하여 그 값을 비교해 보자.

$f(y)=2y\ (3\le y\le 5)$이므로

$$\begin{aligned}\int_3^5 f(y)dy&=\int_3^5 2y\,dy\\ &=\Big[y^2\Big]_3^5=16\end{aligned}$$

$f(g(x))=4x+2\ (1\le x\le 2)$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(g(x))dx&=\int_1^2 (4x+2)dx\\ &=\Big[2x^2+2x\Big]_1^2=8\end{aligned}$$

이므로 서로 다르다. 그러나 $f(g(x))$에 $g'(x)=2$를 곱하면 두 값은 서로 같다.

$$\int_3^5 f(y)dy=\int_1^2 f(g(x))g'(x)dx$$

탐구하기 / 풀이

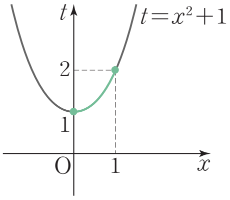
1. $x=0$일 때

$t=0^2+1=\mathbf{1}$

$x=1$일 때

$t=1^2+1=\mathbf{2}$

2. $t=x^2+1$의 그래프는 다음과 같다.



구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $t=x^2+1$의 공역과 치역은 모두 구간 $[1,\ 2]$로 같다.

또 정의역 $\{x\,|\,0\le x\le 1\}$의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면

$x_1{}^2+1\ne x_2{}^2+1$

$\therefore\ f(x_1)\ne f(x_2)$

따라서 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $t=x^2+1$은 일대일 대응이다.

3. $t=x^2+1$에서

$$\frac{dt}{dx}=\boldsymbol{2x}$$

$$x\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}dt}$$

4. 물음 1, 2, 3에 의하여

$$\int_0^1 2x(x^2+1)^{10}dx$$

$$=\int_1^2 2t^{10}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\boldsymbol{\int_1^2 t^{10}dt}$$

45

01 정적분의 치환적분법

탐 구 하 기 / 치환하여 나타내기

$\int_0^1 2x(x^2+1)^{10}\,dx$에서 $x^2+1=t$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. $x=0$, $x=1$일 때, t의 값을 각각 구하여라.
2. 구간 $[0,\ 1]$에서 $t=x^2+1$은 일대일 대응임을 조사하여라.
3. $\dfrac{dt}{dx}$를 구하고, $x\,dx$를 dt로 나타내어라.
4. 주어진 정적분을 t에 대한 정적분으로 나타내어라.

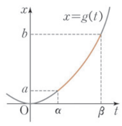
알 아 보 기 / 부정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하여 보자.

부정적분의 치환적분법에서는 $F(x)=\int f(x)dx$ (⋯ ㉠)를 구할 때, $x=g(t)$로 놓고 다음을 계산한다.

$$F(x)=F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)dt \quad \cdots ㉡$$

한편 ㉠에서

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \quad \cdots ㉢$$



$x=g(t)$를 생각할 때 함수 g는 주어진 구간에서 일대일 대응이고 미분가능해야 한다.

또 $x=g(t)$에서 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$라고 하면 ㉡에서

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta$$
$$=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a) \quad \cdots ㉣$$

따라서 ㉢, ㉣로부터 다음과 같은 정적분의 치환적분법을 얻는다.

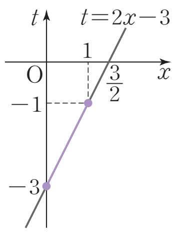
정적분의 치환적분법

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $2x-3=t$로 놓으면



$$2\frac{dx}{dt}=1$$

$x=0$일 때

$t=2\cdot 0-3=-3$

$x=1$일 때

$t=2\cdot 1-3=-1$

이므로

$$\int_0^1 (2x-3)^4\,dx=\int_{-3}^{-1} t^4\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\left[\frac{1}{10}t^5\right]_{-3}^{-1}$$
$$=-\frac{1}{10}+\frac{243}{10}=\boldsymbol{\frac{121}{5}}$$

46

함 께 하 기 / 익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

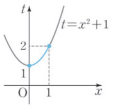
1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 12x(x^2+1)^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

풀이

(1) $x^2+1=t$로 놓으면

$$2x\frac{dx}{dt}=1$$



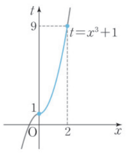
0≤x≤1에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 12x(x^2+1)^5\,dx=\int_1^2 6t^5\,dt$$
$$=\Big[t^6\Big]_1^2$$
$$=63$$

(2) $x^3+1=t$로 놓으면

$$3x^2\frac{dx}{dt}=1$$



0≤x≤2에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=9$이므로

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx=\int_1^9 \frac{1}{t}\,dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^9$$
$$=2\ln 3$$

스 스 로　하 기 / 익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

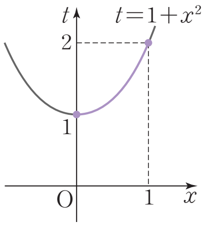
(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x-3)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^5\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{5x^2+4}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+2x^2}\,dx$

(2) $1+x^2=t$로 놓으면

$$2x\frac{dx}{dt}=1$$



$x=0$일 때

$t=1+0^2=1$

$x=1$일 때

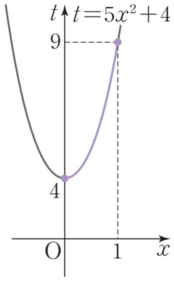
$t=1+1^2=2$

이므로

$$\int_0^1 x(1+x^2)^5\,dx=\int_1^2 t^5\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{12}t^6\right]_1^2$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{1}{12}$$
$$=\mathbf{\frac{21}{4}}$$

(3) $5x^2+4=t$로 놓으면

$$10x\frac{dx}{dt}=1$$



$x=0$일 때 $t=4$

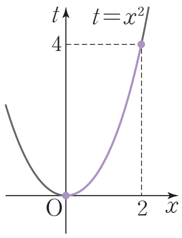
$x=1$일 때 $t=9$

이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{5x^2+4}\,dx$$
$$=\int_4^9 \sqrt{t}\cdot\frac{1}{10}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{15}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$
$$=\frac{9}{5}-\frac{8}{15}=\mathbf{\frac{19}{15}}$$

(4) $x^2=t$로 놓으면

$$2x\frac{dx}{dt}=1$$



$x=0$일 때 $t=0$

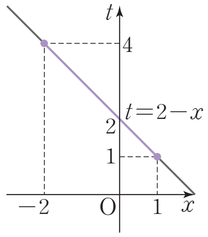
$x=2$일 때 $t=4$

이므로

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx=\int_0^4 e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^4$$
$$=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}(e^4-1)}$$

(5) $2-x=t$로 놓으면

$-\dfrac{dx}{dt}=1$



$x=-2$일 때 $t=4$

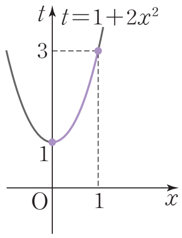
$x=1$일 때 $t=1$

이므로

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$$
$$=\int_{4}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot(-1)\,dt$$
$$=\int_{1}^{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\Big[2t^{\frac{1}{2}}\Big]_{1}^{4}$$
$$=4-2=\mathbf{2}$$

(6) $1+2x^2=t$로 놓으면

$4x\dfrac{dx}{dt}=1$



$x=0$일 때 $t=1$

$x=1$일 때 $t=3$

이므로

$$\int_{0}^{1}\frac{2x}{1+2x^2}\,dx=\int_{1}^{3}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}\ln|t|\Big]_{1}^{3}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}\ln 3}$$

47

함 께 하 기 / 익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

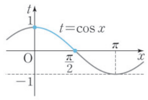
2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2x\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\,dx$

풀이

(1) $\cos x=t$로 놓으면

$-\sin x\dfrac{dx}{dt}=1$



$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2x\sin x\,dx=\int_{0}^{1}3t^2\,dt$$
$$=\Big[t^3\Big]_{0}^{1}$$
$$=\mathbf{1}$$

$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2x\sin x\,dx$

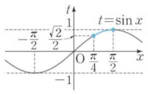
$\displaystyle=\int_{1}^{0}3t^2(-1)\,dt$

$\displaystyle=-\int_{1}^{0}3t^2\,dt$

$\displaystyle=\int_{0}^{1}3t^2\,dt$

(2) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$이므로 $\sin x=t$로 놓으면

$\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$



$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이다.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$
$$=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}\ln 2}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

2 다음 정적분을 구하여라.

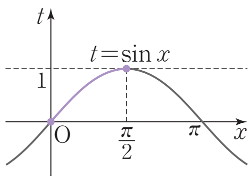
(1) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\frac{2}{x\ln x}\,dx$

스스로 하기 / 풀이

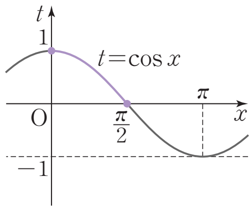
2 (1) $\sin x=t$로 놓으면　$\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$



$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx=\int_{0}^{1}t^2\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_{0}^{1}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) $\cos x=t$로 놓으면　$-\sin x\dfrac{dx}{dt}=1$



$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\,dx=\int_1^0 t^3\cdot(-1)\,dt$$
$$=\int_0^1 t^3 dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

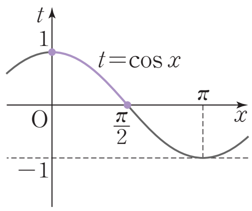
(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos^2 x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx$$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx$에서 $\cos x=t$로

놓으면 $\quad -\sin x\frac{dx}{dt}=1$



$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

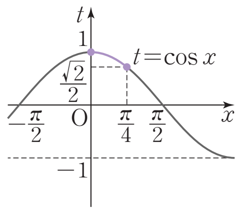
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx=\int_1^0 t^2\cdot(-1)\,dt$$
$$=\int_0^1 t^2 dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에 의하여

(주어진 식)$=1-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(4) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로 $\cos x=t$로 놓으면

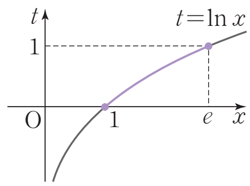
$-\sin x\frac{dx}{dt}=1$



$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$=\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}\cdot(-1)\,dt$$
$$=\left[-\ln|t|\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\mathbf{\frac{1}{2}\ln 2}$$

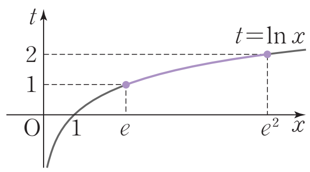
(5) $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$



$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(6) $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$



$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{2}{x\ln x}\,dx=\int_1^2\frac{2}{t}\,dt$$
$$=\left[2\ln|t|\right]_1^2=\mathbf{2\ln 2}$$

02 정적분의 부분적분법

알 아 보 기 / 정적분의 부분적분법에 대하여 알아보자.

두 함수의 곱을 미분하면 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx=\int_a^b \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$
$$=\int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

가 성립한다.

한편 $\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$이므로 다음과 같은 정적분의 부분적분법을 얻을 수 있다.

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

| 보기 | $\int_1^e x\ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$이므로

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\Big[\frac{x^2}{2}\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 32쪽 | 익힘책 33쪽 | 익힘책 35쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^e \ln x\,dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

(3) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$

알아보기 / 해설

피적분함수가 (다항함수)×(지수함수), (다항함수)×(로그함수), (다항함수)×(삼각함수) 꼴일 때는 일반적으로 부분적분법을 이용한다.

피적분함수를 $f(x)$, $g'(x)$로 나눈 후 $f'(x)$, $g(x)$를 각각 구하여 다음과 같이 정적분을 계산한다.

$$\begin{array}{ccc} f(x) & & g'(x) \\ f'(x) & \longleftarrow & g(x) \end{array}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)g'(x)dx$$
$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_1^e \ln x\,dx$$
$$=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=e-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)=\mathbf{1}$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$
$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=0+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$$

(3) $f_1(x)=x^2$, $g_1'(x)=e^x$으로 놓으면 $f_1'(x)=2x$, $g_1(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx$$
$$=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx$$

(i) $\Big[x^2e^x\Big]_0^1=e$

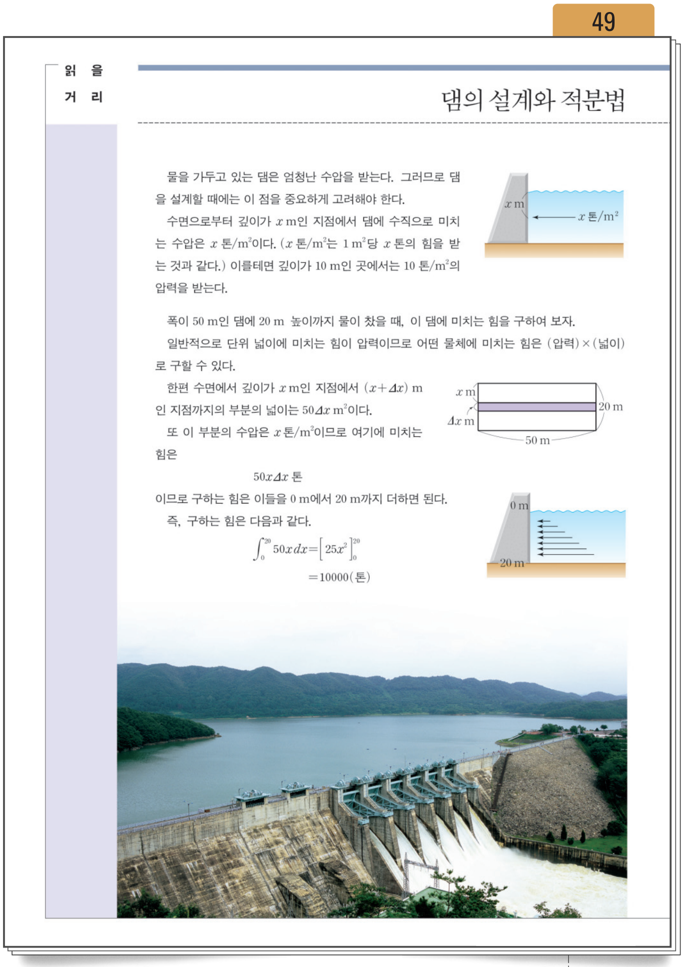
(ii) $\int_0^1 2xe^x\,dx$에서

$f_2(x)=2x$, $g_2'(x)=e^x$으로 놓으면 $f_2'(x)=2$, $g_2(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 2xe^x\,dx=\Big[2xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 2e^x\,dx$$
$$=2e-\Big[2e^x\Big]_0^1$$
$$=2e-(2e-2)=2$$

(i), (ii)에 의하여

(주어진 식)$=\boldsymbol{e-2}$


49

읽을 거리

댐의 설계와 적분법

물을 가두고 있는 댐은 엄청난 수압을 받는다. 그러므로 댐을 설계할 때에는 이 점을 중요하게 고려해야 한다.

수면으로부터 깊이가 x m인 지점에서 댐에 수직으로 미치는 수압은 x 톤/m^2이다. (x 톤/m^2는 1 m^2당 x 톤의 힘을 받는 것과 같다.) 이를테면 깊이가 10 m인 곳에서는 10 톤/m^2의 압력을 받는다.

폭이 50 m인 댐에 20 m 높이까지 물이 찼을 때, 이 댐에 미치는 힘을 구하여 보자.

일반적으로 단위 넓이에 미치는 힘이 압력이므로 어떤 물체에 미치는 힘은 (압력)×(넓이)로 구할 수 있다.

한편 수면에서 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\varDelta x)$ m인 지점까지의 부분의 넓이는 $50\varDelta x\ \text{m}^2$이다.

또 이 부분의 수압은 x 톤/m^2이므로 여기에 미치는 힘은

$$50x\varDelta x \text{ 톤}$$

이므로 구하는 힘은 이들을 0 m에서 20 m까지 더하면 된다.

즉, 구하는 힘은 다음과 같다.

$$\int_0^{20} 50x\,dx=\Big[25x^2\Big]_0^{20}$$
$$=10000(\text{톤})$$

(4) $f_1(x)=x^2$, $g_1{}'(x)=\sin x$로 놓으면

$f_1{}'(x)=2x$, $g_1(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$$
$$=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\,dx$$

(i) $\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\,dx$에서

$f_2(x)=2x$, $g_2{}'(x)=\cos x$로 놓으면 $f_2{}'(x)=2$, $g_2(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\,dx$$
$$=\Big[2x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx$$
$$=\pi-\Big[-2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\pi-2$$

(i), (ii)에 의하여

(주어진 식)$=\boldsymbol{\pi-2}$

참고 | 부정적분과 점화식

부분적분법을 이용하여 피적분함수의 차수를 낮추어 적분할 수 있는 다음과 같은 점화식이 있다.

1. $\displaystyle\int \sin^n x\,dx$
$$=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx \text{ (단, } n\ge2)$$

2. $\displaystyle\int \cos^n x\,dx$
$$=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx \text{ (단, } n\ge2)$$

3. $\displaystyle\int x^n\sin ax\,dx$
$$=-\frac{x^n\cos ax}{a}+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$$
(단, $n\ge1$, $a\ne0$)

4. $\displaystyle\int x^n\cos ax\,dx$
$$=\frac{x^n\sin ax}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$$
(단, $n\ge1$, $a\ne0$)

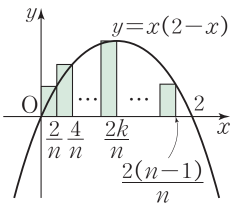
5. $\displaystyle\int x^n e^{ax}dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$
(단, $n\ge1$, $a\ne0$)

6. $\displaystyle\int x^m(\ln x)^n dx$
$$=\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$$
(단, $m\ne1$, $n\ge1$)

중단원 확인하기 / 풀이

1 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,\ \frac{2k}{n},\ \cdots,\ \frac{2n}{n}$



구간 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로 k번째 직사각형의 넓이는

$$\frac{2}{n}\left\{2\left(\frac{2k}{n}\right)-\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}&\int_0^2 x(2-x)\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left\{2\left(\frac{2k}{n}\right)-\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n^2}-\frac{8k^2}{n^3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\&\quad-\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}\\&=\mathbf{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

2 (1) $$\begin{aligned}&\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}\,dx\\&=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=\Big[\ln|x|-\ln|x+1|\Big]_1^2\\&=(\ln 2-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)\\&=2\ln 2-\ln 3=\mathbf{\ln\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

50

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
구분구적법, 정적분, 아래끝, 위끝, 정적분의 기본 정리, $\int_a^b f(x)dx$, $\Big[F(x)\Big]_a^b$

2. 정적분

구분구적법

계산

1 구분구적법을 이용하여 $\int_0^2 x(2-x)dx$를 구하여라.

정적분

계산

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}dx$ (2) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$

(3) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$ (4) $\int_0^{\ln 2}(e^x-e^{-x})^2dx$

절댓값이 있는 정적분

이해

3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^2|x+1|\,dx$ (2) $\int_{-1}^1|x^2-1|\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|dx$ (4) $\int_0^2|2^x-2|\,dx$

치환적분법과 부분적분법

이해

4 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^3\frac{x}{x^2+1}dx$ (2) $\int_0^1 xe^x\,dx$

기계의 유지, 보수

문제 해결

5 어떤 회사에서 기계를 구입하였다. 이 회사는 구입한 지 t년이 지났을 때, 이 기계를 유지, 보수하는 비용의 평균 증가율 $M(t)$를 다음과 같이 예상하고 있다.

$$M(t)=1.2t+1.2^t\ln 1.2\ \text{(백만 원/년)}$$

구입한 지 7년 동안 유지, 보수하는 데 드는 비용을 구하여라.

(단, $1.2^7=3.6$으로 계산한다.)

(2) $$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx\\&=\int_0^1(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,dx\\&=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\&=\mathbf{\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)}\end{aligned}$$

(3) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}(e^x-e^{-x})^2dx&=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-2+e^{-2x})\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}\\&=\mathbf{\frac{15}{8}-2\ln 2}\end{aligned}$$

3 (1) $f(x)=|x+1|$로 놓으면

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\geq -1) \\ -x-1 & (x\leq -1) \end{cases}$$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{-2}^{2}|x+1|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{2}(x+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\mathbf{5}$$

(2) $f(x)=|x^2-1|$로 놓으면

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ -x^2+1 & (-1\leq x\leq 1) \end{cases}$$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

(3) $\sin x-\frac{1}{2}=0$에서

$$x=\frac{\pi}{6}$$

$0\leq x\leq\frac{\pi}{6}$일 때

$$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|=-\sin x+\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$일 때

$$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|=\sin x-\frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(-\sin x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\cos x+\frac{1}{2}x\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\cos x-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\mathbf{-\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}-1}$$

(4) $f(x)=|2^x-2|$로 놓으면

$$f(x)=\begin{cases} 2^x-2 & (x\geq 1) \\ -2^x+2 & (x\leq 1) \end{cases}$$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$$\int_{0}^{2}|2^x-2|dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-2^x+2)dx+\int_{1}^{2}(2^x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{2^x}{\ln 2}+2x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-2x\right]_{1}^{2}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{\ln 2}}$$

4 (1) $x^2+1=t$로 놓으면

$$2x\frac{dx}{dt}=1$$

또 $0\leq x\leq 3$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=10$이므로

$$\int_{0}^{3}\frac{x}{x^2+1}dx=\int_{1}^{10}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_{1}^{10}=\mathbf{\frac{1}{2}\ln 10}$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_{0}^{1}xe^x dx=\left[xe^x\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^x dx$$

$$=e-\left[e^x\right]_{0}^{1}=\mathbf{1}$$

5 7년 동안 유지, 보수하는 데 드는 비용은 0부터 7까지의 평균 증가율 $M(t)$를 적분한 값이므로

$$\int_{0}^{7}M(t)dt=\int_{0}^{7}(1.2t+1.2^t\ \ln 1.2)dt$$

$$=\left[0.6t^2+1.2^t\right]_{0}^{7}$$

$$\fallingdotseq 29.4+3.6-1=32$$

따라서 구입한 지 7년 동안 유지, 보수하는 데 드는 비용은 **약 3200만 원**이다.

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.230

01 기본

구분구적법을 이용하여 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 구하여라.

02 기본

다음은 정적분의 정의를 이용하여 $\int_0^1 x^3 dx$의 값을 구하는 과정이다.

> $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이므로
>
> $\Delta x=\dfrac{1}{n},\ x_k=\boxed{(가)}$
>
> $\therefore \int_0^1 x^3 dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\boxed{(나)}$
>
> $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^4}\cdot\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2\right]=\boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $\dfrac{k}{n},\ \dfrac{k^3}{n^4},\ \dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{k}{n},\ \dfrac{k^3}{n^4},\ \dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{k}{n},\ \dfrac{8k^3}{n^4},\ \dfrac{1}{8}$

④ $\dfrac{2k}{n},\ \dfrac{k^3}{n^4},\ \dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{2k}{n},\ \dfrac{8k^3}{n^4},\ \dfrac{1}{6}$

03 기본

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^4\dfrac{5}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

04 바탕

다음을 미분하여라.

(1) $\int_{3}^{x}(2t^2+3t-5)dt$ (2) $\int_{0}^{x}\sin t\cos t\,dt$

(3) $\int_{1}^{x}\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt$ (4) $\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{t}dt$

05 바탕

다음 중 나머지와 값이 다른 것은?

① $\int_{0}^{1}dx$ ② $\int_{0}^{1}2x\,dx$ ③ $\int_{0}^{2}x\,dx$

④ $\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx$ ⑤ $\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$

06 기본

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{2}(3x+2)dx$ (2) $\int_{0}^{3}(x-1)^2dx$

(3) $\int_{0}^{\pi}(e^x-\cos x)dx$ (4) $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

07 기본

함수 $f(x)=\sin x$일 때,

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

08 실력

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$의 값이 최소가 되게 하는 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

09 기본

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ (2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$

10 실력

함수 $f(x)$가 연속일 때, 정적분 $\int_{0}^{2}\{f(x)+f(4-x)\}dx$와 값이 같은 것은?

① $2\int_{0}^{2}f(x)dx$ ② $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ ③ $\int_{0}^{4}f(x)dx$
④ $2\int_{2}^{4}f(x)dx$ ⑤ $\int_{-4}^{4}f(x)dx$

11 실력

$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$의 값은?

① 1 ② $\ln 2$ ③ $\ln 2-1$
④ $2\ln 2$ ⑤ $2\ln 2-1$

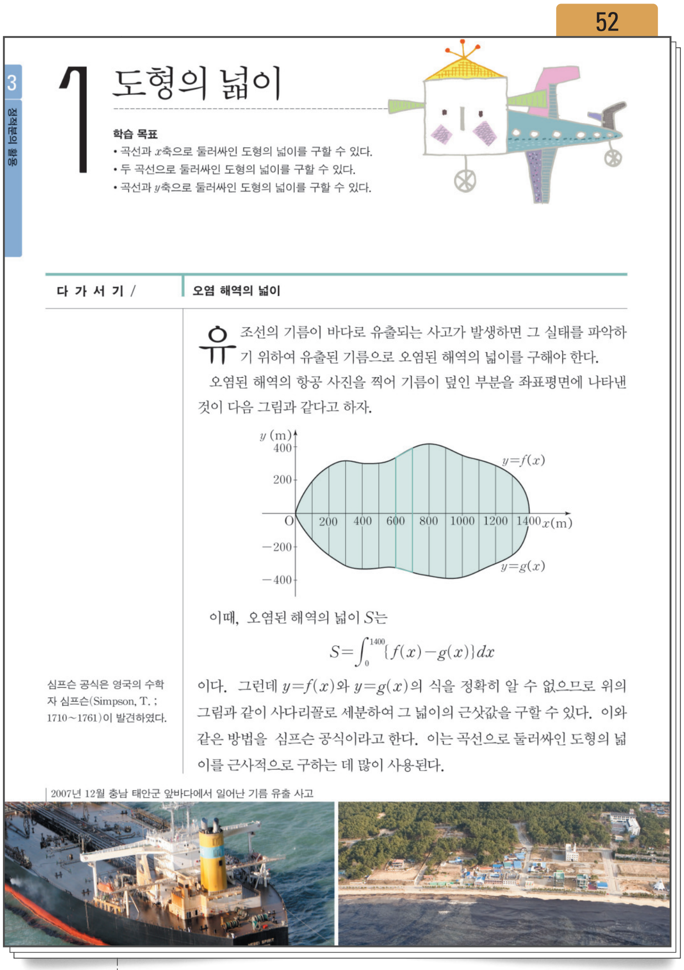
3 정적분의 활용

이 단원을 배우면

- 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
- 회전체의 부피를 구할 수 있다.
- 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
2. 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
3. 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.



52

3 정적분의 활용

1 도형의 넓이

학습 목표

- 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

다 가 서 기 / **오염 해역의 넓이**

유조선의 기름이 바다로 유출되는 사고가 발생하면 그 실태를 파악하기 위하여 유출된 기름으로 오염된 해역의 넓이를 구해야 한다.

오염된 해역의 항공 사진을 찍어 기름이 덮인 부분을 좌표평면에 나타낸 것이 다음 그림과 같다고 하자.

이때, 오염된 해역의 넓이 S는

$$S=\int_0^{1400}\{f(x)-g(x)\}dx$$

이다. 그런데 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 식을 정확히 알 수 없으므로 위의 그림과 같이 사다리꼴로 세분하여 그 넓이의 근삿값을 구할 수 있다. 이와 같은 방법을 심프슨 공식이라고 한다. 이는 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 근사적으로 구하는 데 많이 사용된다.

심프슨 공식은 영국의 수학자 심프슨(Simpson, T. ; 1710~1761)이 발견하였다.

2007년 12월 충남 태안군 앞바다에서 일어난 기름 유출 사고

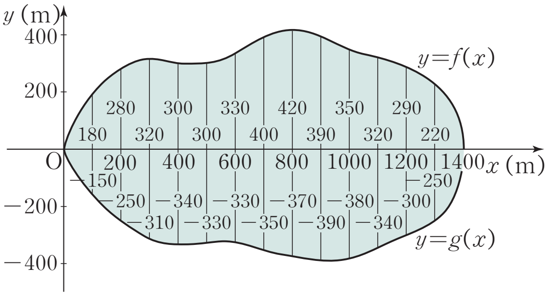
다가서기 / 해설

본문에 제시한 오염 해역의 경계선과 같이, 생활 주변에서 찾을 수 있는 대부분의 도형은 그 함수식을 정확히 알 수 없거나 또는 적분하기 어려운 식으로 되어 있다. 이때, 정적분의 근사 공식으로 심프슨의 공식(Simpson's formula)과 사다리꼴의 공식(trapezoidal formula)이 많이 쓰인다. 사다리꼴의 공식은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \frac{\varDelta x}{2}\{f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

$$\left(단,\ \varDelta x=\frac{b-a}{n}\right)$$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같다고 하자.



이때, 사다리꼴의 공식으로 본문에 제시한 오염 해역의 넓이 S를 구하면

$$S=\int_0^{1400}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\fallingdotseq \frac{\varDelta x}{2}[\{f(x_0)-g(x_0)\}+2\{f(x_1)-g(x_1)\}+\cdots+2\{f(x_{13})-g(x_{13})\}+\{f(x_{14})-g(x_{14})\}]$$

$$=\frac{100}{2}(0+2\times330+2\times530+\cdots+2\times470+0)$$

$$=819000\,(\mathrm{m}^2)$$

53

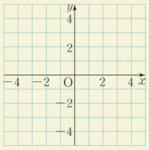
01 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

탐 구 하 기 / 조건을 만족하는 구간 찾기

두 함수

$$f(x)=x^2-2x$$
$$g(x)=x^3-3x^2-x+3$$

에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



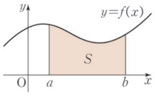
1. 오른쪽 좌표평면에 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프를 그려라.
2. 각 함수에 대하여 함숫값이 0 이상이 되는 구간을 구하여라.

알 아 보 기 / 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

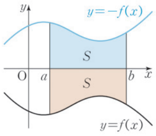
(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때
곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-f(x)$와 x축에 대하여 대칭이고, $-f(x)\geq 0$이므로

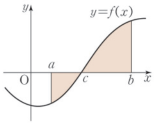
$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$



$f(x)\leq 0$일 때, $\int_a^b f(x)dx$ 의 값은 음수가 되므로 넓이를 구할 때에는 $-f(x)$ 의 정적분을 구해야 한다.

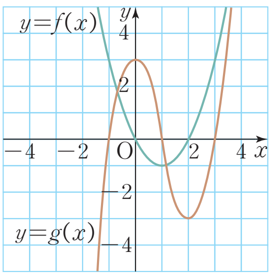
(iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\leq 0$이고, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때

$$S=\int_a^c \{-f(x)\}dx+\int_c^b f(x)dx$$
$$=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$



탐구하기 / 풀이

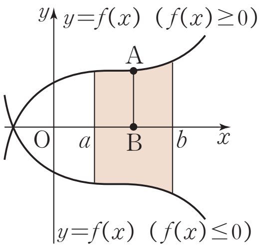
1. $f(x)=x^2-2x$
$\quad=x(x-2)$
$g(x)=x^3-3x^2-x+3$
$\quad=(x+1)(x-1)(x-3)$
이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



2. 물음 1의 그래프에서
$f(x)\geq 0$인 구간은
$x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$
$g(x)\geq 0$인 구간은
$-1\leq x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$

알아보기 / 해설

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.



(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$인 경우
넓이를 구하려는 도형은 길이가 $f(x)$인 선분 AB를 $x=a$에서 $x=b$까지 움직여서 만들어진 부분이므로

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$인 경우
선분 AB의 길이가 $-f(x)$이므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

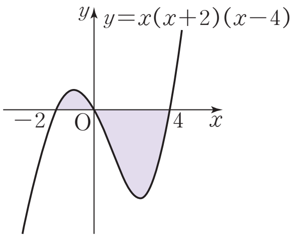
(i), (ii)에 의하여 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 부호에 관계없이 $\overline{\mathrm{AB}}=|f(x)|$이고, 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

스스로 하기 /

풀이

1 (1) 곡선 $y=x(x+2)(x-4)$와 x축으로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



구간 $[-2,\ 0]$에서

$y=x(x+2)(x-4)\geq0$

이고, 구간 $[0,\ 4]$에서

$y=x(x+2)(x-4)\leq0$

이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{0}x(x+2)(x-4)dx+\int_{0}^{4}\{-x(x+2)(x-4)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-2x^2-8x)dx+\int_{0}^{4}(-x^3+2x^2+8x)dx$$

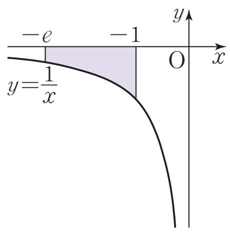
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-4x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{4}$$

$$=\left\{0-\left(4+\frac{16}{3}-16\right)\right\}+\left\{\left(-64+\frac{128}{3}+64\right)-0\right\}$$

$$=\frac{20}{3}+\frac{128}{3}$$

$$=\mathbf{\frac{148}{3}}$$

(2) 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=-e$, $x=-1$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



구간 $[-e,\ -1]$에서 $y=\dfrac{1}{x}<0$이므로

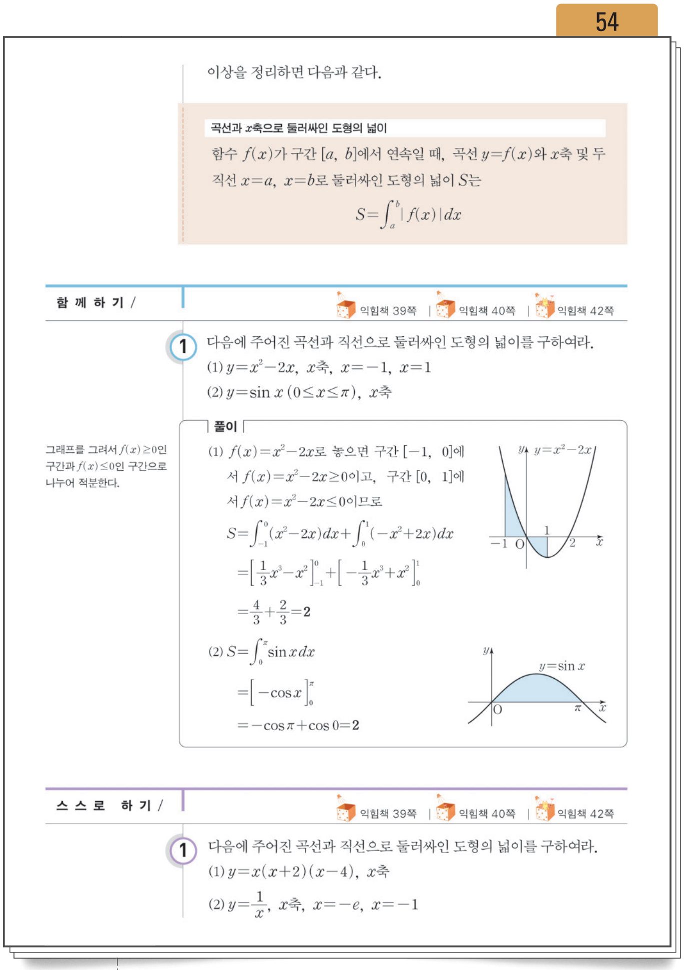
구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-e}^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\Big[-\ln|x|\Big]_{-e}^{-1}$$

$$=-\ln 1-(-\ln e)$$

$$=\mathbf{1}$$



54

이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b|f(x)|dx$$

함 께 하 기 / 익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음에 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x$, x축, $x=-1$, $x=1$

(2) $y=\sin x\ (0\leq x\leq\pi)$, x축

풀이

그래프를 그려서 $f(x)\geq0$인 구간과 $f(x)\leq0$인 구간으로 나누어 적분한다.

(1) $f(x)=x^2-2x$로 놓으면 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)=x^2-2x\geq0$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x^2-2x\leq0$이므로

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\mathbf{2}$$

(2) $S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$=-\cos\pi+\cos 0=\mathbf{2}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음에 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x(x+2)(x-4)$, x축

(2) $y=\dfrac{1}{x}$, x축, $x=-e$, $x=-1$

55

02 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

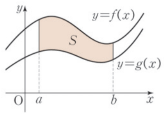
알 아 보 기 / 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

이제 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $0\le g(x)\le f(x)$일 때

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

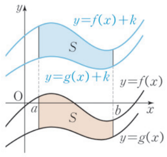


(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $g(x)\le f(x)$이지만 $g(x)$ 또는 $f(x)$가 음의 값을 가질 때 오른쪽 그림과 같이 두 곡선을 y축의 양의 방향으로 k만큼 평행이동 하여

$0\le g(x)+k\le f(x)+k$

가 되도록 한다.

이때, 평행이동 한 도형의 넓이는 변하지 않으므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx$$
$$=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\le g(x)$일 때에도 (i), (ii)와 같은 방법으로 하면 $S=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx$

일반적으로 다음이 성립한다.

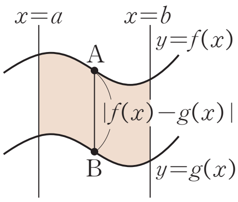
두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

알아보기 / 해설

• 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.



구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)$이면 넓이를 구하려는 도형은 길이가 $f(x)-g(x)$인 선분 AB를 $x=a$에서 $x=b$까지 움직여서 만들어진 부분이므로

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

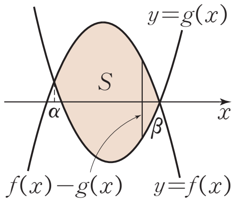
한편 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\le g(x)$이면 선분 AB의 길이가 $g(x)-f(x)$이므로 $f(x)$와 $g(x)$의 크기에 관계없이 선분 AB의 길이는 $|f(x)-g(x)|$이다.

$$\therefore S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

• 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

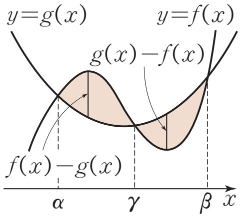
방정식 $f(x)=g(x)$를 풀어 교점의 x좌표를 찾아서 적분 구간을 정한다.

(1) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(x)\ge g(x)$인 경우



$$S=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$

(2) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$이고 구간 $[\alpha,\ \gamma]$에서 $f(x)\ge g(x)$, 구간 $[\gamma,\ \beta]$에서 $g(x)\ge f(x)$인 경우

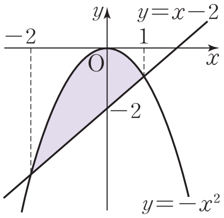


$$S=\int_\alpha^\gamma \{f(x)-g(x)\}dx+\int_\gamma^\beta \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\gamma |f(x)-g(x)|dx+\int_\gamma^\beta |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $-x^2=x-2$에서

$x=-2,\ x=1$



이때, 구간 $[-2,\ 1]$에서 $-x^2\ge x-2$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{1}\{-x^2-(x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{7}{6}+\frac{10}{3}$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

56

함 께 하 기 / 익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x-1,\ y=x-1$

(2) $y=2\sin x,\ y=\sin 2x,\ x=0,\ x=\pi$

풀이

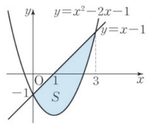
적분 구간을 찾기 위하여 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

(1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-1=x-1$에서

$x=0,\ x=3$

이때, 구간 $[0,\ 3]$에서

$x-1\ge x^2-2x-1$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^3\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$
$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

$2\sin x-\sin 2x=0$
$2\sin x-2\sin x\cos x=0$
$2\sin x(1-\cos x)=0$
$\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$
$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$

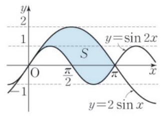
(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는

$2\sin x=\sin 2x\ (0\le x\le \pi)$에서

$x=0,\ x=\pi$

이때, 구간 $[0,\ \pi]$에서

$2\sin x\ge \sin 2x$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-2\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\mathbf{4}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 다음 곡선과 직선 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

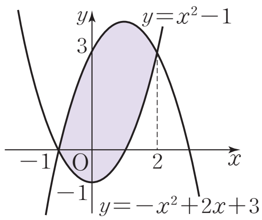
(1) $y=-x^2,\ y=x-2$

(2) $y=x^2-1,\ y=-x^2+2x+3$

(3) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=2$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^2-1=-x^2+2x+3$에서

$x=-1,\ x=2$

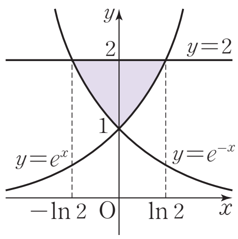


이때, 구간 $[-1,\ 2]$에서 $-x^2+2x+3\ge x^2-1$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{20}{3}+\frac{7}{3}$$
$$=\mathbf{9}$$

(3) 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$의 교점의 x좌표는 $e^x=e^{-x}$에서

$x=0$



곡선 $y=e^x$과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $e^x=2$에서

$x=\ln 2$

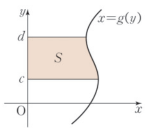
57

03 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이

알 아 보 기 / 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

함수 $x=g(y)$가 y축의 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |x|\,dy=\int_c^d |g(y)|\,dy$$



함 께 하 기 / 익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

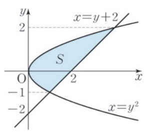
1 곡선 $x=y^2$과 직선 $x=y+2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이

주어진 곡선과 직선의 교점의 y좌표는 $y^2=y+2$에서 $y=-1,\ 2$이다.

이때, y축의 구간 $[-1,\ 2]$에서 $y+2\geq y^2$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy$$
$$=\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$



스 스 로 하 기 / 익힘책 39쪽 | 익힘책 40쪽 | 익힘책 42쪽

1 곡선 $y=\ln x$와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

2 다음의 넓이를 구하여라.

(1) 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형

(2) 곡선 $x=\dfrac{y}{y^2+1}$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형

곡선 $y=e^{-x}$과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $e^{-x}=2$에서

$x=-\ln 2$

이때, 구간 $[-\ln 2,\ 0]$에서

$2>e^{-x}$

이고 구간 $[0,\ \ln 2]$에서

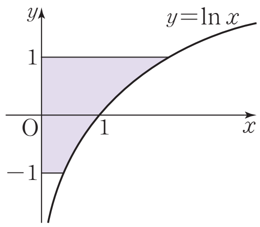
$2>e^{x}$

이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-\ln 2}^{0}(2-e^{-x})dx+\int_{0}^{\ln 2}(2-e^{x})dx$$
$$=\left[2x+e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{0}+\left[2x-e^{x}\right]_{0}^{\ln 2}$$
$$=\{1-(-2\ln 2+2)\}+\{(2\ln 2-2)-(-1)\}$$
$$=\mathbf{4\ln 2-2}$$

스스로 하기 / 풀이

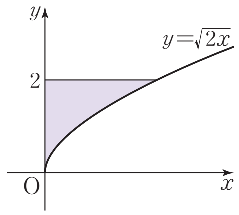
1



y축의 구간 $[-1,\ 1]$에서 $x=e^y>0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}e^y\,dy$$
$$=\left[e^y\right]_{-1}^{1}=\mathbf{e-\frac{1}{e}}$$

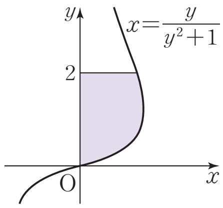
2 (1)



y축의 구간 $[0,\ 2]$에서 $x=\dfrac{1}{2}y^2\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2 \frac{1}{2}y^2\,dy$$
$$=\left[\frac{1}{6}y^3\right]_0^2=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

(2)



y축의 구간 $[0,\ 2]$에서 $x=\dfrac{y}{y^2+1}\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2 \frac{y}{y^2+1}\,dy$$
$$=\left[\frac{1}{2}\ln|y^2+1|\right]_0^2=\mathbf{\frac{1}{2}\ln 5}$$

공학 도구 / 해설

본문에서 사용한 프로그램은 Equation Grapher로서 이를 이용하여 함수의 그래프를 그리고 도형의 넓이를 구할 수 있다.

이 프로그램은 전국수학교사모임 홈페이지(http://www.tmath.or.kr/)에서 데모 버전을 내려 받을 수 있다.

본문의 입력창에 쓴

abs(x^2−4);−1;3

에서

abs(x^2−4): 함수의 식

−1: 아래끝의 값

3: 위끝의 값

을 나타낸다.

즉, Equation Grapher에서 도형의 넓이를 구할 때, 입력창에

(함수의 식);(아래끝의 값);(위끝의 값)

의 꼴로 입력을 한다.

여기서 abs( )는 괄호 안의 식의 절댓값을 뜻하는 명령어이다.

58

공 학 도 구

* 수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

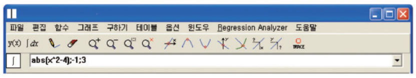
컴퓨터로 도형의 넓이 구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

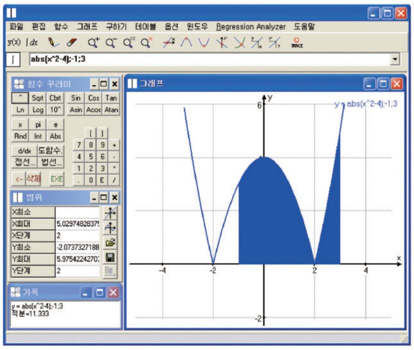
프로그램을 이용하여 곡선 $y=x^2-4$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이 $\int_{-1}^{3}|x^2-4|\,dx$를 구하여 보자.

1단계 프로그램을 실행시키고, 정적분 아이콘 ∫dx 를 클릭한다.

2단계 입력창에 abs(x^2−4);−1;3을 입력한다.



3단계 Enter 키를 누르면 '기록' 창에 구하는 도형의 넓이인 11.333이 나타난다.



익힘책 코너

개념 넓히기_ 41쪽

정적분의 계산에서 자주 사용하는 공식

1. $\int_{\alpha}^{\beta}|(x-\alpha)(x-\beta)|\,dx=\frac{1}{6}|\beta-\alpha|^3$

2. $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

3. $\int_{\alpha}^{\beta}|(x-\alpha)(x-\beta)^2|\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$

6. 자연수 n에 대하여

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=I_n$$

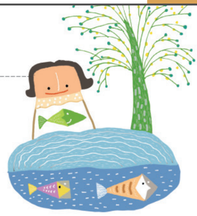
으로 놓으면

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\ (n\geq 3)$$

59

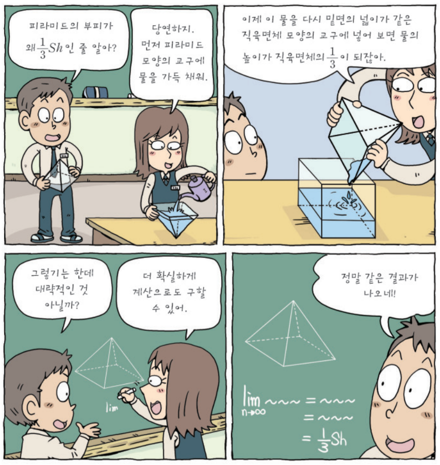
2 도형의 부피

학습 목표
- 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
- 회전체의 부피를 구할 수 있다.



3 정적분의 활용

다가서기 / **피라미드의 부피**



원뿔의 부피는 원뿔의 반지름의 길이와 높이가 각각 같은 원기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이다. 이것은 그리스 시대의 에우독소스(Eudoxos ; ? B. C. 400~? B. C. 350)가 증명하였다.

이 단원에서 배우는 정적분을 이용하면 원뿔과 같은 입체도형의 부피를 편리하게 구할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
2. 회전체의 부피를 구할 수 있다.
3. 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 회전체의 부피를 구할 수 있다.

다가서기 / 해설

밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 직육면체의 부피는 Sh이고 이 직육면체의 밑면과 높이가 같은 사각뿔의 부피는 직육면체의 부피의 $\frac{1}{3}$이다.

이를 증명하는 방법은 여러 가지가 있는데 그중에서 본문에 나온 것은 교구를 이용하는 방법과 구분구적법을 이용하는 방법이다.

구분구적법을 이용하여 피라미드의 부피를 구하는 것은 교과서 34쪽의 스스로 하기 **2**의 풀이에 있다.

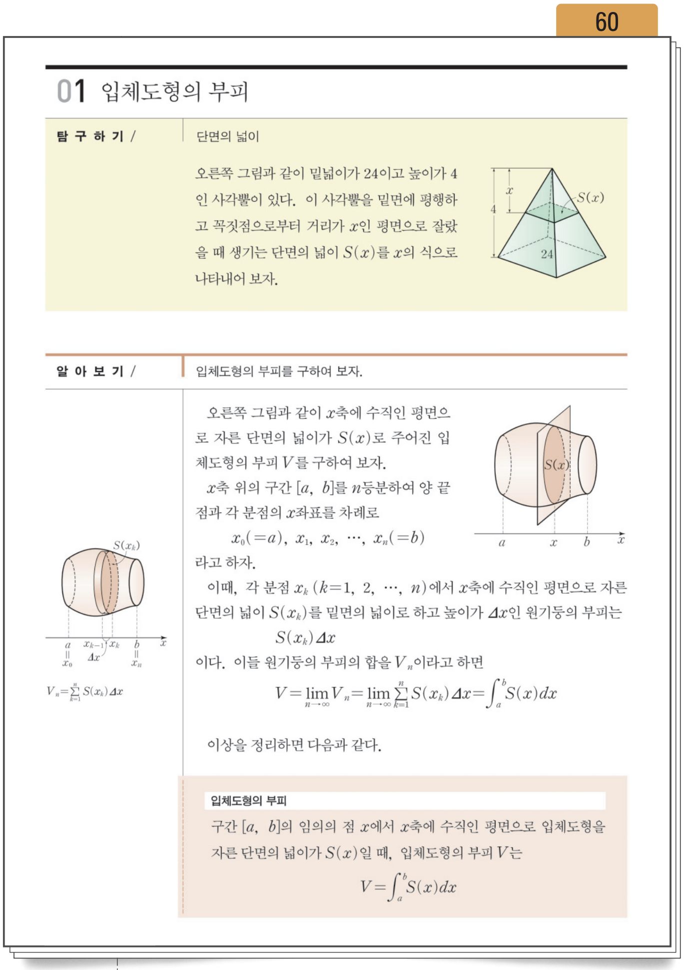
참고 | 포도주 통의 신계량법

천문학자이자 수학자인 케플러(Kepler, J. ; 1571~1630)는 포도주 통과 같은 용기의 부피를 측정하는 방법이 담긴 '포도주 통의 신계량법(Nova stereometria doliorum vinariorum)'이라는 책을 통하여 적분 개념을 이용한 부피 계산법을 발표하였다.

케플러는 통의 표면이 직선이 아니기 때문에 얇은 원판을 무한히 겹쳐 놓아 부피를 측정하였고, 모든 물체의 부피를 계산하는 데 이 방법과 유사한 것을 사용할 수 있다는 것을 깨달았다.

또한 케플러는 원뿔 곡선이 만들어 내는 원, 타원, 포물선 등의 도형에 이를 일반화시키려고 하였다.

케플러의 이론은 정밀성은 다소 떨어졌지만, 이 책은 17세기 적분학의 기초가 되었다.



60

01 입체도형의 부피

탐 구 하 기 / 단면의 넓이

오른쪽 그림과 같이 밑넓이가 24이고 높이가 4인 사각뿔이 있다. 이 사각뿔을 밑면에 평행하고 꼭짓점으로부터 거리가 x인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이 $S(x)$를 x의 식으로 나타내어 보자.

알 아 보 기 / 입체도형의 부피를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$로 주어진 입체도형의 부피 V를 구하여 보자.

x축 위의 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n(=b)$$

라고 하자.

이때, 각 분점 $x_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x_k)$를 밑면의 넓이로 하고 높이가 $\varDelta x$인 원기둥의 부피는

$$S(x_k)\varDelta x$$

이다. 이들 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\varDelta x=\int_a^b S(x)dx$$

$V_n=\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\varDelta x$

이상을 정리하면 다음과 같다.

입체도형의 부피

구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

탐구하기 / 풀이

닮은 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같으므로

$x^2 : 4^2=S(x) : 24$

$16S(x)=24x^2$

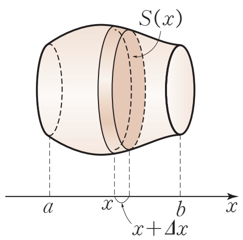
$\therefore S(x)=\dfrac{3}{2}x^2$

알아보기 / 해설

단면의 넓이 $S(x)$가 연속함수이면 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

임을 알아보자.



위의 그림에서 구간 $[a,\ b]$ 사이의 임의의 점 x에 대하여 a에서 x까지 그 사이에 있는 부분의 부피를 $V(x)$라고 하면, x의 증분 $\varDelta x$에 대한 부피 $V(x)$의 증분 $\varDelta V(x)$는

$$\varDelta V(x)=V(x+\varDelta x)-V(x)$$

이다.

구간 $[x,\ x+\varDelta x]$에서 단면의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 $M_x,\ m_x$라고 하면

$$m_x\cdot\varDelta x\le V(x+\varDelta x)-V(x)\le M_x\cdot\varDelta x$$

즉

$$m_x\le\frac{V(x+\varDelta x)-V(x)}{\varDelta x}\le M_x$$

여기서 단면의 넓이 $S(x)$가 연속함수이므로 $\varDelta x\to0$이면 $m_x\to S(x),\ M_x\to S(x)$이다.

그러므로

$$V'(x)=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{V(x+\varDelta x)-V(x)}{\varDelta x}$$
$$=S(x)$$

$V'(x)=S(x)$이므로 $V(x)$는 $S(x)$의 한 부정적분이다.

$$\therefore \int_a^b S(x)dx=\Big[V(x)\Big]_a^b$$
$$=V(b)-V(a)$$

이때, $V(a)=0$이므로 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=V(b)=\int_a^b S(x)dx$$

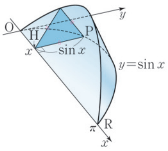
61

함 께 하 기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

1 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ \sin x)$에서 x축 위에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 한 변으로 하는 정삼각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P가 곡선 $y=\sin x$ 위를 원점에서 점 $\mathrm{R}(\pi,\ 0)$까지 움직일 때, 이 정삼각형이 만드는 입체도형의 부피를 구하여라.

풀이

오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sin x$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이 $S(x)$는



$$S(x)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}^2\sin 60^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$$

따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

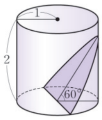
두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ 를 이용한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

1 오른쪽 그림과 같은 유리잔에 물을 채우면 물의 깊이가 x cm일 때 수면의 넓이는 $3\sqrt{x}$ cm^{2}라고 한다. 깊이가 4 cm일 때 물의 부피를 구하여라.

2 밑면의 반지름의 길이가 1이고, 높이가 2인 원기둥이 있다. 이 밑면의 지름을 포함하고 밑면과 60° 를 이루는 평면으로 원기둥을 자를 때 생기는 입체도형 중에서 작은 쪽의 부피를 구하여라.



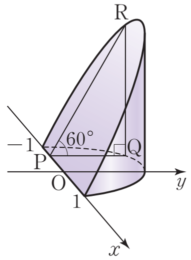
스스로 하기 /

풀이

1 물의 깊이가 x cm일 때 수면의 넓이 $S(x)$가 $S(x)=3\sqrt{x}$ (cm)이므로 구하는 물의 부피 V는

$$V=\int_0^4 S(x)\,dx$$
$$=\int_0^4 3\sqrt{x}\,dx$$
$$=\int_0^4 3x^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=\mathbf{16(cm^3)}$$

2 다음 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 잡자.



x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(-1\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 $\triangle\mathrm{PQR}$라고 하면

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$$
$$=\sqrt{1-x^2}$$
$$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 60^\circ$$
$$=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$

이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이를 $S(x)$라고 하면

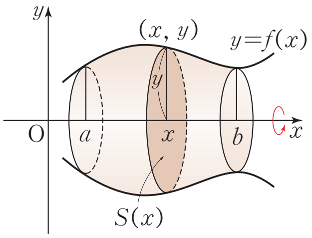
$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_{-1}^1 S(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

알아보기 / 해설

- 회전축이 x축인지 y축인지 주의한다.
- 곡선 $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$를 x축을 중심으로 회전시킨 회전체의 부피를 구하여 보자.

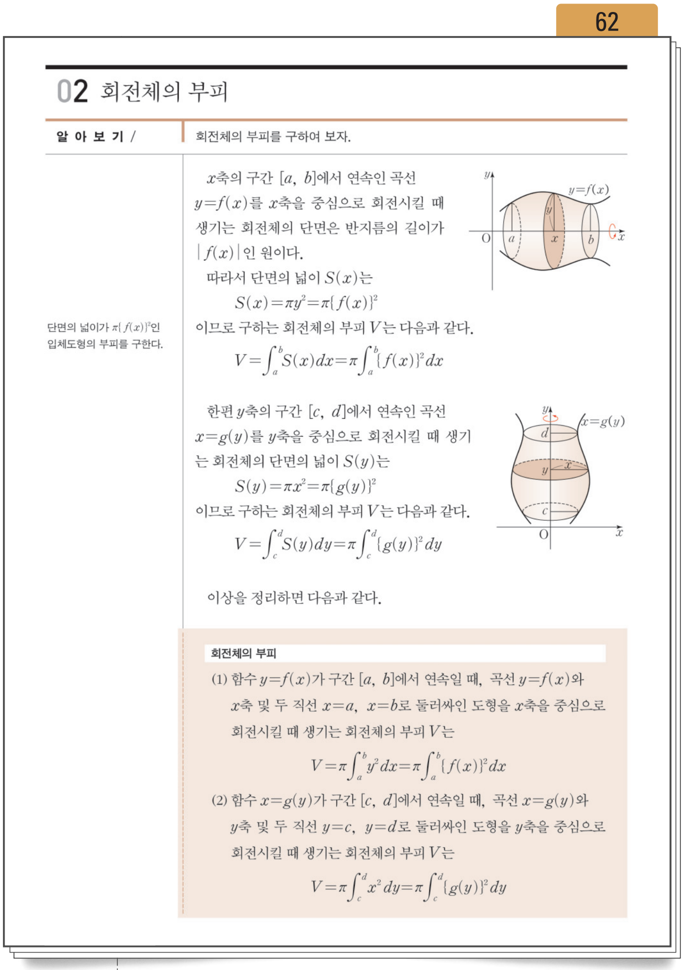


곡선 $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$를 x축을 중심으로 회전시킨 회전체를 점 $(x,\ 0)$을 지나는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\pi y^2$$
$$=\pi\{f(x)\}^2$$

따라서 회전체의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$
$$=\int_a^b \pi y^2 dx$$
$$=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$


62

02 회전체의 부피

알 아 보 기 / 회전체의 부피를 구하여 보자.

x축의 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 곡선 $y=f(x)$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 단면은 반지름의 길이가 $|f(x)|$인 원이다.

따라서 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$$

이므로 구하는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.

단면의 넓이가 $\pi\{f(x)\}^2$인 입체도형의 부피를 구한다.

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$$

한편 y축의 구간 $[c,\ d]$에서 연속인 곡선 $x=g(y)$를 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 단면의 넓이 $S(y)$는

$$S(y)=\pi x^2=\pi\{g(y)\}^2$$

이므로 구하는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_c^d S(y)dy=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

회전체의 부피

(1) 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$$

(2) 함수 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy$$

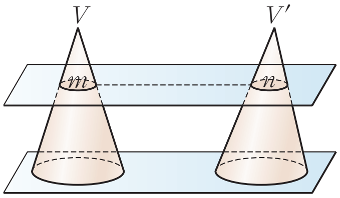
익힘책 코너

읽기 자료_ 46쪽

카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598~1647)의 원리

경계면으로 둘러싸인 두 입체도형 V, V'을 하나의 정해진 평면과 평행인 평면으로 자를 때, V, V'의 내부에 있는 잘린 부분의 넓이의 비가 항상 $m:n$이면 두 입체도형 V, V'의 부피의 비도 $m:n$이다.

만약 $m:n=1:1$이면 두 입체도형 V, V'의 부피는 서로 같다.



63

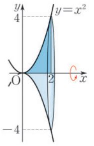
함 께 하 기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

1 곡선 $y=x^2$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

풀이

오른쪽 그림에서 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_0^2 y^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^2 x^4\,dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$
$$=\frac{32}{5}\pi$$



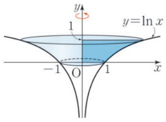
2 곡선 $y=\ln x$와 x축, y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V를 구하여라.

풀이

$y=\ln x$에서 $x=e^y$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_0^1 (e^y)^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^1 e^{2y}\,dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$



스 스 로 하 기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

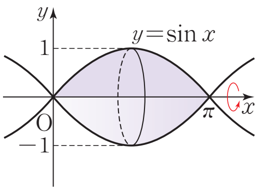
1 $y=\sin x$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

2 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(1) $y=4-x^2$, x축 (2) $y=e^x$, y축, $y=e$

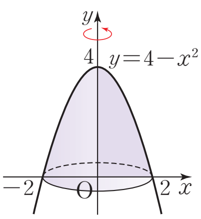
스스로 하기 / 풀이

1 오른쪽 그림에서 구하는 회전체의 부피 V는



$$V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

2 (1)



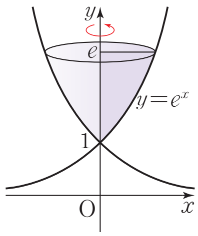
$y=4-x^2$에서

$x=\pm\sqrt{4-y}$

이므로 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{4-y})^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^4(4-y)\,dy$$
$$=\pi\left[4y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^4$$
$$=\pi(16-8)=\boldsymbol{8\pi}$$

(2)



$y=e^x$에서

$x=\ln y$

이므로 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_1^e(\ln y)^2\,dy$$

$f_1(y)=(\ln y)^2$, $g_1'(y)=1$이라고 하면 $f_1'(y)=2\ln y\cdot\frac{1}{y}$, $g_1(y)=y$이므로

$$V=\pi\left\{\left[y(\ln y)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\ln y\cdot\frac{1}{y}\cdot y\,dy\right\}$$
$$=\pi\left(e-\int_1^e 2\ln y\,dy\right)$$

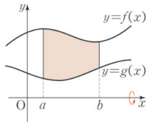
$f_2(y)=\ln y$, $g_2'(y)=2$라고 하면

$f_2'(y)=\frac{1}{y}$, $g_2(y)=2y$이므로

$$V=\pi\left\{e-\left(\left[\ln y\cdot 2y\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{y}\cdot 2y\,dy\right)\right\}$$
$$=\pi\left\{e-\left(2e-\int_1^e 2\,dy\right)\right\}$$
$$=\pi\left(e-2e+\left[2y\right]_1^e\right)$$
$$=\pi\{-e+(2e-2)\}$$
$$=\boldsymbol{(e-2)\pi}$$

알 아 보 기 / 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 회전체의 부피를 알아보자.

두 함수 $f(x), g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x) \ge g(x) \ge 0$일 때, 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$와 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.



$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx-\pi\int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

함 께 하 기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

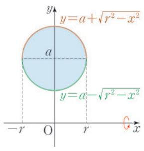
3 원 $x^2+(y-a)^2=r^2$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V를 구하여라. (단, $a>r>0$)

풀이

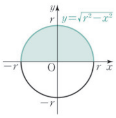
$x^2+(y-a)^2=r^2$에서

$y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}$

구하는 부피 V는 반원 $y=a+\sqrt{r^2-x^2}$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피에서 반원 $y=a-\sqrt{r^2-x^2}$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로



$$V=\pi\int_{-r}^{r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2 dx-\pi\int_{-r}^{r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2 dx$$
$$=4a\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$
$$=\boldsymbol{2\pi^2r^2a}$$



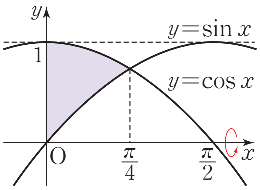
$\sqrt{r^2-x^2}$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 x축 윗부분이므로 $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi r^2}{2}$이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽 | 익힘책 48쪽

3 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$와 두 직선 $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

3



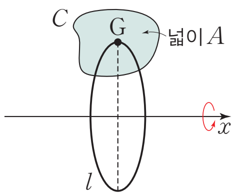
구하는 부피 V는 곡선 $y=\cos x$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피에서 곡선 $y=\sin x$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$$
$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

참고 | 파포스(Pappos ; ? 290～? 350)의 제1정리

파포스의 제1정리에 의하면 다음이 성립한다.

x축의 위쪽에 있는 폐곡선 C에 둘러싸인 도형의 넓이가 A일 때, 폐곡선 C를 x축을 중심으로 회전시킨 회전체의 부피 V는 다음과 같다.



$$V=A\times l$$

여기서 l은 폐곡선 C에 둘러싸인 도형의 무게중심 G가 이동한 거리이다.

이 정리를 이용하여 함께하기 **3**의 회전체의 부피를 구하면 다음과 같다.

폐곡선인 원의 넓이는

$$A=\pi r^2$$

원의 무게중심은 점 $(0,\ a)$이고 1회전할 때 무게중심이 이동한 거리는

$$l=2\pi a$$

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=A\times l$$
$$=\pi r^2\times 2\pi a$$
$$=2\pi^2r^2a$$


65

3 속도와 거리

학습 목표
- 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
- 평면 위를 움직이는 물체의 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
- 곡선의 길이를 구할 수 있다.

3 정적분의 활용

다 가 서 기 / 사이클로이드

우리나라 전통 기와를 살펴보면 일정한 두께로 납작하게 곡면을 이루며 휘어져 있다. 기와의 기능은 지붕을 장식하고 비바람을 막으며, 빗물이 새는 것을 방지하여 건물의 부식을 막는 것이다. 따라서 기와의 모양을 빗물이 빨리 흘러내려 기와에 스며들지 않도록 만들어야 하는데, 빗물을 가장 빨리 흘러내리도록 하는 곡선의 모양은 사이클로이드(Cycloid)곡선으로 알려져 있다.

사이클로이드는 바퀴라는 의미의 그리스 어에서 나온 말로 회전하는 바퀴 위의 한 점의 자취를 나타낸다. 즉, 다음 그림과 같이 원 $x^2+(y-1)^2=1$을 x축 위를 미끄러지지 않도록 하여 1회전시킬 때, 이 원 위의 점 P가 그리는 도형을 사이클로이드라고 한다.

위의 그림에서 원이 회전한 각을 t라고 하면 원 위의 점 P의 x좌표와 y좌표는 각각 다음과 같다.

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$$

사이클로이드 곡선은 그 길이를 구하기 쉬울 뿐 아니라 역학적으로 매우 중요한 곡선이다.

소단원의 학습 목표

1. 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
2. 평면 위를 움직이는 물체의 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
3. 곡선의 길이를 구할 수 있다.

참고 | 사이클로이드

자전거 바퀴가 회전할 때 바퀴의 한 점이 그리는 곡선은 하나의 사이클을 이루며 반복하게 된다.

1599년경 갈릴레이(Galilei, G. ; 1564~1642)는 이 곡선을 '사이클로이드'라고 이름을 붙였는데, 사이클로이드는 다른 운동하는 물체의 자취와는 다른 특징이 있다.

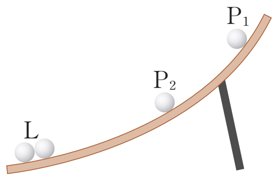
(1) 최속하강선

직선, 포물선, 사이클로이드, 원을 따라 공을 굴리면 어느 곡선 위의 공이 가장 먼저 도착할까? 언뜻 생각하면 직선 경로가 길이가 짧아서 가장 시간이 짧게 걸릴 것 같아 보인다. 그러나 사이클로이드 위에서는 가속도에 의해 보다 빨리 속도가 증가하므로 사이클로이드가 거리는 더 길지만 더 빠른 시간에 도착하게 되는 것이다.

이런 이유로 사이클로이드를 최속하강선이라고 한다.

(2) 등시곡선

사이클로이드 위에 여러 개의 공을 거리를 두고 놓아 보자.



점 L이 사이클로이드 위의 가장 낮은 점이고 오른쪽 P_1, P_2에서 동시에 공을 굴렸을 때, L에 도착하는 시간이 같다는 것이 알려져 있다.

즉, 사이클로이드 위에 두 개의 공을 일정한 거리를 두고 동시에 떨어뜨리면 두 개의 공은 바닥으로 동시에 도착한다.

결국 사이클로이드 위에 놓인 물체는 거리에 관계없이 바닥에 동시에 떨어지게 된다.

이런 이유로 사이클로이드를 등시곡선이라고 한다.

탐구하기 / 풀이

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 물체의 t초 후의 속도 v가

$v=3t^2-2t$

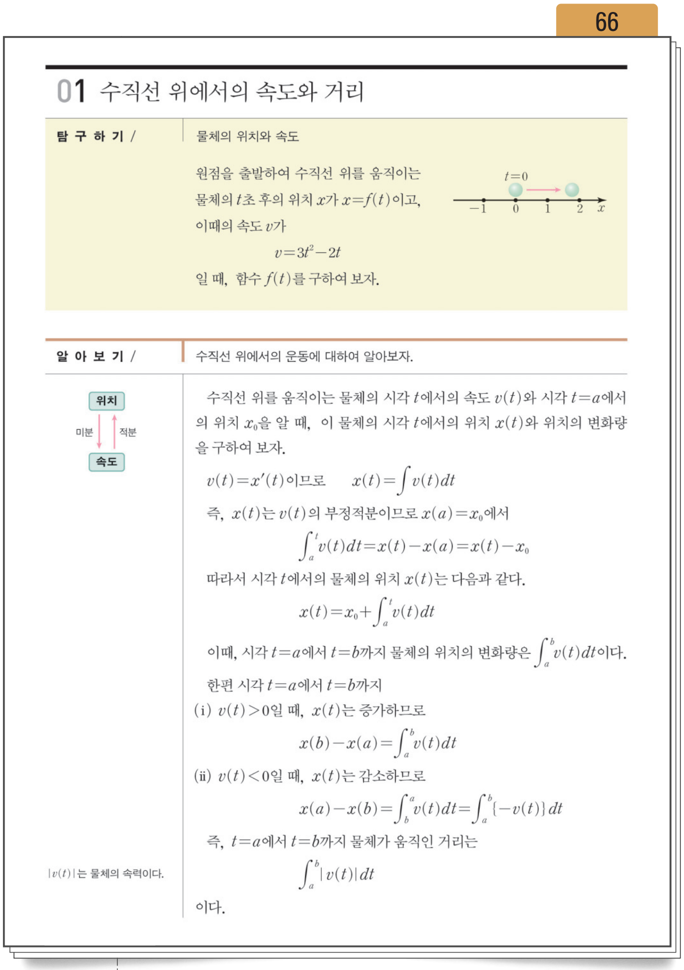
이므로 이 물체의 t초 후의 위치 $x=f(t)$는

$$f(t)=\int v\,dt$$
$$=\int(3t^2-2t)\,dt$$
$$=t^3-t^2+C$$

한편 이 물체는 원점에서 출발하므로 $t=0$일 때 $x=0$이다. 즉, $f(0)=0$이므로

$C=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(t)=t^3-t^2}$



66

01 수직선 위에서의 속도와 거리

탐 구 하 기 / 물체의 위치와 속도

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 물체의 t초 후의 위치 x가 $x=f(t)$이고, 이때의 속도 v가

$$v=3t^2-2t$$

일 때, 함수 $f(t)$를 구하여 보자.

알 아 보 기 / 수직선 위에서의 운동에 대하여 알아보자.

수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 시각 $t=a$에서의 위치 x_0을 알 때, 이 물체의 시각 t에서의 위치 $x(t)$와 위치의 변화량을 구하여 보자.

$v(t)=x'(t)$이므로 $\quad x(t)=\int v(t)\,dt$

즉, $x(t)$는 $v(t)$의 부정적분이므로 $x(a)=x_0$에서

$$\int_a^t v(t)\,dt=x(t)-x(a)=x(t)-x_0$$

따라서 시각 t에서의 물체의 위치 $x(t)$는 다음과 같다.

$$x(t)=x_0+\int_a^t v(t)\,dt$$

이때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)\,dt$이다.

한편 시각 $t=a$에서 $t=b$까지

(i) $v(t)>0$일 때, $x(t)$는 증가하므로

$$x(b)-x(a)=\int_a^b v(t)\,dt$$

(ii) $v(t)<0$일 때, $x(t)$는 감소하므로

$$x(a)-x(b)=\int_b^a v(t)\,dt=\int_a^b \{-v(t)\}\,dt$$

즉, $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리는

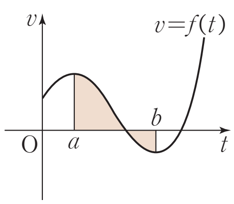
$$\int_a^b |v(t)|\,dt$$

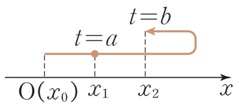
이다.

$|v(t)|$는 물체의 속력이다.

알아보기 / 해설

• 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 v가 $v=f(t)$로 주어질 때





(1) 시각 $t=a$부터 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량(변위)은

$$x_2-x_1=\int_a^b v\,dt$$
$$=\int_a^b f(t)\,dt$$

(2) 시각 $t=b$일 때의 점 P의 위치는

$$x_2=\int_a^b v\,dt+x_0$$
$$=\int_a^b f(t)\,dt+x_0$$

(단, x_0은 출발점의 위치)

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v|\,dt$$
$$=\int_a^b |f(t)|\,dt$$

• 점 P의 위치와 움직인 거리가 다를 수 있음에 유의한다.

67

이상을 정리하면 다음과 같다.

물체의 위치의 변화량과 수직선 위에서의 물체가 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 물체의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0이면

(1) 시각 t에서의 물체의 위치: $x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량: $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리: $\int_a^b |v(t)|dt$

함 께 하 기 / 익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-3t+2$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 물체의 위치는 1이다.)

(1) 시각 $t=2$에서 물체의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리

풀이

(1) 시각 $t=0$일 때의 위치가 1이므로 시각 $t=2$에서 물체의 위치는

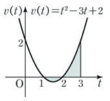
$$x(2)=1+\int_0^2(t^2-3t+2)dt$$
$$=1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량은

$$\int_1^3(t^2-3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^3=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_1^3|t^2-3t+2|dt=\int_1^2(-t^2+3t-2)dt+\int_2^3(t^2-3t+2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^3$$
$$=\mathbf{1}$$



구간 $[1,\ 2]$에서 $v(t)\le 0$
구간 $[2,\ 3]$에서 $v(t)\ge 0$

그러나 움직인 거리는 속력을 적분해야 하며 위치 $x(t)$와 위치의 변화량은 다를 수도 있다.

함께하기 / 해설

1 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를 t에 대하여 미분하면 $x'(t)=v(t)$이다.

따라서 $x(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로 다음이 성립한다.

$$x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$$

이때, $t=b$를 대입하면

$$x(b)=x(a)+\int_a^b v(t)dt$$

$$\therefore \int_a^b v(t)dt=x(b)-x(a)$$

즉, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 물체의 위치의 변화량 $x(b)-x(a)$는 $\int_a^b v(t)dt$이다.

보충 학습

시각 t에서의 위치가 x일 때, 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

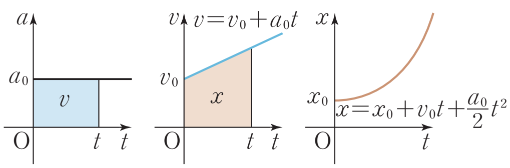
$$v=\frac{dx}{dt}$$

$$a=\frac{dv}{dt}$$

따라서 x_0에서 출발한 물체의 처음 속도가 v_0이고 가속도가 a_0이라고 하면 이 물체의 시각 t에서의 속도 v와 위치 x는 다음과 같다.

$$v=v_0+\int_0^t a_0 dt$$
$$=v_0+a_0t$$

$$x=x_0+\int_0^t v dt$$
$$=x_0+\int_0^t (v_0+a_0t)dt$$
$$=x_0+v_0t+\frac{a_0}{2}t^2$$



스스로 하기 / 풀이

1 (1) 시각 $t=0$일 때의 높이는 0이므로 발사한 후 t초일 때의 로켓의 높이 $h(t)$는

$h(t)$
$=\int_0^t(-3t^2+192t+120)dt$
$=\left[-t^3+96t^2+120t\right]_0^t$
$=\mathbf{-t^3+96t^2+120t}$

(2) 시각 $t=30$에서의 로켓의 높이는

$h(30)$
$=-27000+86400+3600$
$=\mathbf{63000\,(m)}$

2 (1) 시각 $t=0$일 때의 위치가 1이므로 시각 t에서의 물체의 위치 $x(t)$는

$x(t)$
$=1+\int_0^t(\sin t-\sin 2t)dt$
$=1+\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^t$
$=1+\left\{\left(-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right\}$
$=\mathbf{\frac{1}{2}\cos 2t-\cos t+\frac{3}{2}}$

(2) $\sin t-\sin 2t=0$을 풀면

$\sin t-2\sin t\cos t=0$
$\sin t(1-2\cos t)=0$
$\therefore t=\pi$ 또는 $t=\frac{\pi}{3}$

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$에서

$v(t)\le 0$

구간 $\left[\frac{\pi}{3},\ \pi\right]$에서

$v(t)\ge 0$

이므로 구하는 거리 s는

$s=\int_0^\pi|\sin t-\sin 2t|dt$
$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\sin t+\sin 2t)dt$
$\quad+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin t-\sin 2t)dt$
$=\left[\cos t-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$
$\quad+\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$
$=\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}$
$\quad+\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right\}$
$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\mathbf{\frac{5}{2}}$

68

2 수직선 위를 움직이는 물체가 있다. 이 물체가 원점을 출발한 후 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=\cos t+\cos 2t$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서의 물체의 위치 $x(t)$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 물체가 움직인 거리 s

풀이

(1) $x(t)=\int_0^t(\cos t+\cos 2t)dt=\left[\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^t=\mathbf{\sin t+\frac{\sin 2t}{2}}$

(2) $\cos t+\cos 2t=0$을 풀면 $\cos t+2\cos^2 t-1=0$

$(\cos t+1)(2\cos t-1)=0$ $\quad\therefore t=\pi$ 또는 $t=\frac{\pi}{3}$

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$에서 $v(t)\ge 0$, 구간 $\left[\frac{\pi}{3},\ \pi\right]$에서 $v(t)\le 0$이므로 구하는 거리 s는

$s=\int_0^\pi|\cos t+\cos 2t|dt$
$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+\cos 2t)dt-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\cos t+\cos 2t)dt$
$=\left[\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

스스로 하기 / 익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 어떤 로켓을 지면에서 발사한 후 t초일 때의 로켓의 수직 방향으로의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면

$$v(t)=-3t^2+192t+120$$

이다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 발사한 후 t초일 때의 로켓의 높이 $h(t)$를 구하여라.

(2) 이 로켓을 발사한 후 30초일 때의 로켓의 높이를 구하여라.

2 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\sin t-\sin 2t$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 위치는 1이다.)

(1) 시각 t에서의 물체의 위치

(2) 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 물체가 움직인 거리

69

02 평면 위에서의 속도와 거리

알 아 보 기 / 평면 위에서의 운동에 대하여 알아보자.

평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

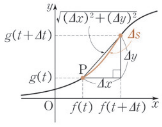
로 주어질 때, t에서의 속도 v의 순서쌍 $(v_x,\ v_y)$는 다음과 같다.

$$(v_x,\ v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s를 구하여 보자.

t의 증분 Δt에 대응하는 $x,\ y$의 증분 $\Delta x,\ \Delta y$는 각각 다음과 같다.

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$
$$\Delta y=g(t+\Delta t)-g(t)$$



한편 점 P가 시각 a에서 t까지 움직인 거리를 $s(t)$라고 하면 $s(t)$의 증분 Δs는 Δt가 충분히 작을 때

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

에 매우 가까운 값이 되므로

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\fallingdotseq\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

과 같이 쓸 수 있다.

여기서 Δt의 값이 한없이 0에 가까워지면

$$\begin{aligned}s'(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\end{aligned}$$

$s(t)$는 $s'(t)$의 한 부정적분이므로 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$\begin{aligned}s&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt\end{aligned}$$

와 같이 나타내어진다.

알아보기 / 해설

수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t_0일 때의 위치가 x_0이고, 시각 t일 때의 속도를 v라고 하면 이 물체의 위치 x는

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}v\,dt$$

또 시각 t_1에서 t_2까지 물체의 위치의 변화량은

$$x_2-x_1=\int_{t_1}^{t_2}v\,dt$$

이고, 움직인 거리 s는

$$s=\int_{t_1}^{t_2}|v|\,dt$$

이다.

한편 평면 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 위치가 $(x(t),\ y(t))$일 때, 이 물체의 속도 v의 순서쌍 $(v_x,\ v_y)$는

$$(v_x,\ v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

또 이때의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

이므로 시각 t_1에서 t_2까지 물체가 움직인 거리 s는

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

참고 | 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)의 운동방정식

뉴턴의 운동의 제2법칙에 의하면 움직이는 물체의 운동의 가속도는 그것에 일치하는 힘에 비례한다.

시각 t일 때의 위치를 x, 힘을 f라고 하면

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f\ (m\text{은 관성질량 상수})$$

이것이 뉴턴의 운동방정식으로 주어진 f에 의하여 x를 t의 함수로 풀면 물체의 운동 상태는 완전히 해명된다.

일반적으로 중력의 방향을 나타내는 선 위에서

$$f=mg\ (g\text{는 중력가속도})$$

일 때는 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=mg$에서

$$\frac{dx}{dt}=v_0+gt$$

$$x=h+v_0t+\frac{1}{2}gt^2\ (h,\ v_0\text{은 상수})$$

이 되어 자유낙하하는 물체의 속도, 낙하 거리의 공식이 얻어진다.

스스로 하기 / 풀이

1 $\dfrac{dx}{dt}=2t,\ \dfrac{dy}{dt}=t^2-1$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=(2t)^2+(t^2-1)^2$$
$$=t^4+2t^2+1$$
$$=(t^2+1)^2$$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^2\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2(t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}+2$$
$$=\mathbf{\frac{14}{3}}$$

2 $\dfrac{dx}{dt}=-2t\cos t-(1-t^2)\sin t$

$\dfrac{dy}{dt}=-2t\sin t+(1-t^2)\cos t$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=\{-2t\cos t-(1-t^2)\sin t\}^2+\{-2t\sin t+(1-t^2)\cos t\}^2$$
$$=4t^2\cos^2 t+4t(1-t^2)\sin t\cos t+(1-t^2)^2\sin^2 t+4t^2\sin^2 t-4t(1-t^2)\sin t\cos t+(1-t^2)^2\cos^2 t$$
$$=4t^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+(1-t^2)^2(\sin^2 t+\cos^2 t)$$
$$=4t^2+(1-2t^2+t^4)$$
$$=t^4+2t^2+1$$
$$=(t^2+1)^2$$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^1\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1(t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}+1$$
$$=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

70

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 위에서의 물체가 움직인 거리

평면 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$라고 하면 물체가 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

함께 하기 / 익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=e^t\cos 2\pi t,\ y=e^t\sin 2\pi t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리 s를 구하여라.

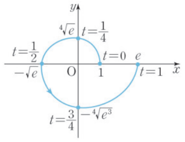
풀이

$\dfrac{dx}{dt}=e^t(\cos 2\pi t-2\pi\sin 2\pi t)$

$\dfrac{dy}{dt}=e^t(\sin 2\pi t+2\pi\cos 2\pi t)$

이므로 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1 e^t\sqrt{1+4\pi^2}\,dt=\sqrt{1+4\pi^2}\,(e-1)$$



스스로 하기 / 익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

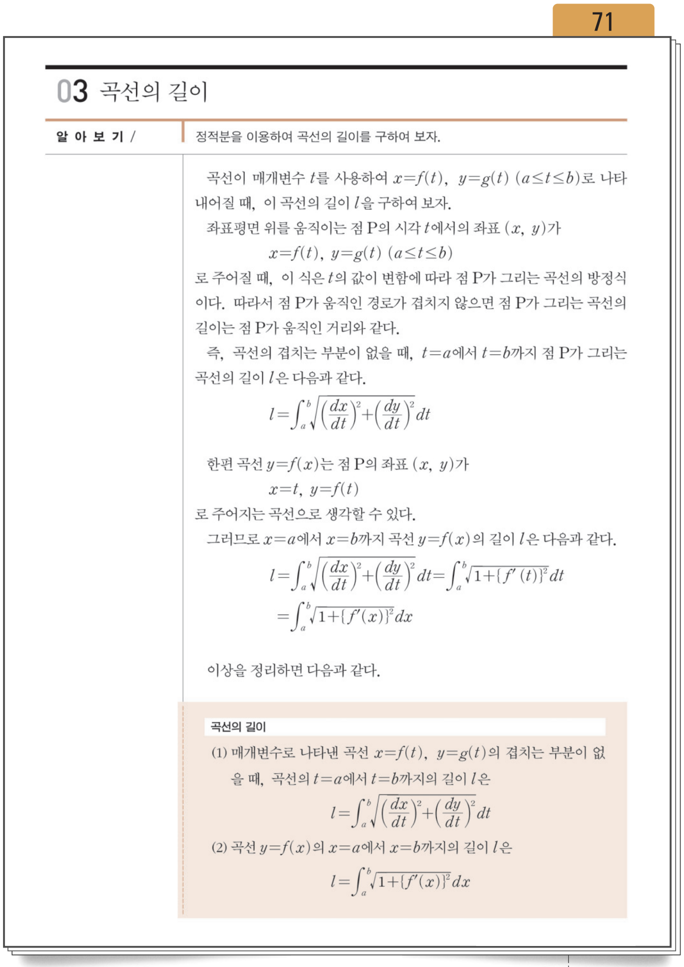
$$x=t^2,\ y=\frac{t^3}{3}-t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리를 구하여라.

2 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=(1-t^2)\cos t,\ y=(1-t^2)\sin t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리를 구하여라.



71

03 곡선의 길이

알 아 보 기 / 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구하여 보자.

곡선이 매개변수 t를 사용하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$로 나타내어질 때, 이 곡선의 길이 l을 구하여 보자.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 (x, y)가

$$x=f(t),\ y=g(t)\ (a\le t\le b)$$

로 주어질 때, 이 식은 t의 값이 변함에 따라 점 P가 그리는 곡선의 방정식이다. 따라서 점 P가 움직인 경로가 겹치지 않으면 점 P가 그리는 곡선의 길이는 점 P가 움직인 거리와 같다.

즉, 곡선의 겹치는 부분이 없을 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

한편 곡선 $y=f(x)$는 점 P의 좌표 (x, y)가

$$x=t,\ y=f(t)$$

로 주어지는 곡선으로 생각할 수 있다.

그러므로 $x=a$에서 $x=b$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선의 길이

(1) 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$의 겹치는 부분이 없을 때, 곡선의 $t=a$에서 $t=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(2) 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

알아보기 / 해설

곡선이 매개변수 t를 사용하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$로 나타내어질 때, 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 움직인 거리는 점 P가 그리는 곡선의 길이와 같다.

따라서 점 P가 움직인 경로가 겹치지 않으면 점 P가 그리는 곡선의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

한편 곡선 $y=f(x)$는 점 P의 좌표 (x, y)가

$$x=t,\ y=f(t)$$

로 주어지는 곡선으로 생각할 수 있다.

이때,

$$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=f'(t)$$

이므로 곡선 $y=f(t)$의 $t=a$에서 $t=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

참고 | 적분법의 발견

이집트, 바빌로니아, 중국 등 고대 수학사에서도 도형의 길이, 넓이, 부피를 구하는 구적법이 사용되었으나 17세기에 와서야 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)이 '움직이는 물체의 시각 t에서의 속도 v가 주어질 때 정해진 시간 $[a, b]$ 동안 그 물체가 그리는 자취의 길이'를 구하는 방법으로 적분법을 발견하였다.

한편 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)는 '곡선의 접선이 주어졌을 때 그 곡선을 구하는 방법'을 찾기 위하여 적분법을 발견하였다.

함 께 하 기 / 익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

1 다음을 구하여라.

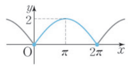
(1) 곡선 $x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$의 $\theta=0$에서 $\theta=2\pi$까지의 길이

(2) 곡선 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$의 $x=0$에서 $x=1$까지의 길이

풀이

(1) $x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$



따라서 구하는 곡선의 길이 l은

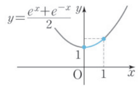
$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\mathbf{8}$$

(2) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$에서

$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$



따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 50쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 52쪽

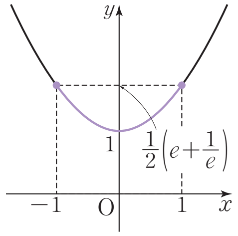
1 곡선 $x=\ln t$, $y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$의 $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지의 길이를 구하여라.

2 곡선 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$의 $x=0$에서 $x=2$까지의 길이를 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

1 $x=\ln t$, $y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}$



$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{t^2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\right)^2$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\right)dt$$

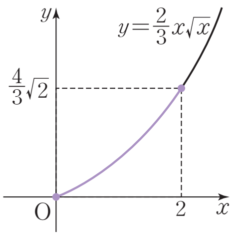
$$=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{2t}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$=\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2e}\right)-\left(\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}e\right)$$

$$=\mathbf{e-\frac{1}{e}}$$

2 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$에서

$$f'(x)=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$



따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^2\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,dx$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+x}\,dx$$

$1+x=t$로 놓으면

$\frac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$l=\int_1^3\sqrt{t}\,dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$

$$=\mathbf{2\sqrt{3}-\frac{2}{3}}$$

73

중 단 원 확 인 하 기

3. 정적분의 활용

곡선과 축 사이의 넓이

계산

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1$, x축　　(2) $y=x^3-6x$, x축, $x=1$, $x=3$

(3) $y=e^{2x}$, x축, $x=0$, $x=2$　　(4) $y=\ln x$, x축, y축, $y=1$

회전체의 부피

계산

2 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형을 [ ] 안에 주어진 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(1) $y=\sin x+\cos x$, x축, y축, $x=\pi$ [x축]

(2) $y=\ln x$, x축, y축, $y=1$ [y축]

속도와 거리

이해

3 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v=\cos\pi t$일 때, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

(2) 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 (x, y)가

$$x=e^t\cos t,\ y=-e^t\sin t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

두 곡선 사이의 넓이

이해

4 다음을 구하여라.

(1) 두 곡선 $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이

기름 탱크

의사소통

5 어떤 기름 탱크에 기름을 채우는 데 기름의 깊이가 x cm일 때의 그 표면의 넓이는 $\ln(x+1)$ cm^{2}라고 한다. 기름의 깊이가 20 cm일 때 기름의 부피를 구하여라.

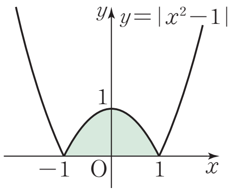
중단원 확인하기 / 풀이

1 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x^2-1|\,dx$

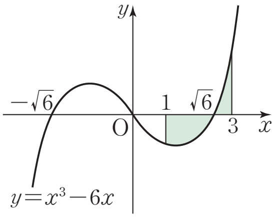
$\displaystyle=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$

$\displaystyle=\mathbf{\frac{4}{3}}$



(2)



$\displaystyle\int_{1}^{3}|x^3-6x|\,dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{\sqrt{6}}(-x^3+6x)\,dx+\int_{\sqrt{6}}^{3}(x^3-6x)\,dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^2\right]_{1}^{\sqrt{6}}+\left[\frac{1}{4}x^4-3x^2\right]_{\sqrt{6}}^{3}$

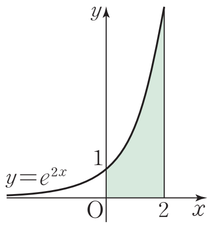
$\displaystyle=\mathbf{\frac{17}{2}}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2}|e^{2x}|\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{2}e^{2x}\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{2}$

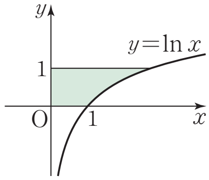
$\displaystyle=\mathbf{\frac{1}{2}(e^4-1)}$



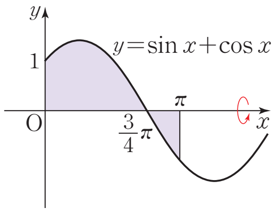
(4) $\displaystyle\int_{0}^{1}e^y\,dy$

$\displaystyle=\left[e^y\right]_{0}^{1}$

$=\mathbf{e-1}$



2 (1)



$\displaystyle V=\pi\int_{0}^{\pi}y^2\,dx$

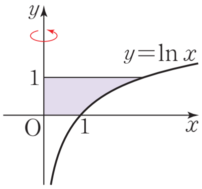
$\displaystyle=\pi\int_{0}^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,dx$

$\displaystyle=\pi\int_{0}^{\pi}(1+2\sin x\cos x)\,dx$

$\displaystyle=\pi\int_{0}^{\pi}(1+\sin 2x)\,dx$

$\displaystyle=\pi\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\pi}=\boldsymbol{\pi^2}$

(2) $V=\pi\int_0^1 x^2\,dy$

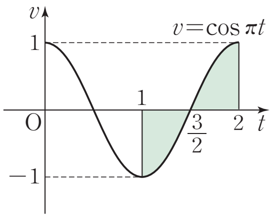


$=\pi\int_0^1 e^{2y}\,dy$

$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\pi(e^2-1)}$

3 (1)



$\int_1^2|\cos\pi t|\,dt$

$=\int_1^{\frac{3}{2}}(-\cos\pi t)\,dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\cos\pi t\,dt$

$=\left[-\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_{\frac{3}{2}}^2=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$

(2) $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=-e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^2\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\cos t+\sin t)^2}\,dt$

$=\int_0^2\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^2\sqrt{2}e^t\,dt=\sqrt{2}\left[e^t\right]_0^2$

$=\boldsymbol{\sqrt{2}(e^2-1)}$

4 (1) $y=x^3$과

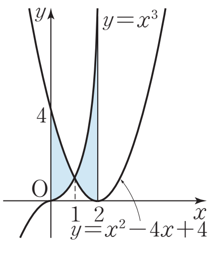
$y=x^2-4x+4$

의 교점의 x좌표는

$x^3=x^2-4x+4$에서

$x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_0^2|x^3-(x^2-4x+4)|\,dx$

$=\int_0^1(-x^3+x^2-4x+4)\,dx$

$\quad+\int_1^2(x^3-x^2+4x-4)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^1$

$\quad+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_1^2$

$=\boldsymbol{\frac{11}{2}}$

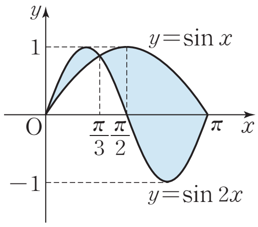
(2) $0\le x\le\pi$에서

$y=\sin x$와

$y=\sin 2x$의 교점

의 x좌표는

$\sin x=\sin 2x$에



서 $\quad x=0,\ x=\frac{\pi}{3},\ x=\pi$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^\pi|\sin x-\sin 2x|\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\sin x+\sin 2x)\,dx$

$\quad+\int_{\frac{\pi}{3}}^\pi(\sin x-\sin 2x)\,dx$

$=\left[\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\quad+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^\pi=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

5 $V=\int_0^{20}\ln(x+1)\,dx$

$x+1=t$로 놓으면 $\quad\frac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=20$일 때 $t=21$이므로

$V=\int_1^{21}\ln t\,dt=\left[t\ln t\right]_1^{21}-\int_1^{21}t\cdot\frac{1}{t}\,dt$

$\quad=\mathbf{21\ ln\ 21-20\ (cm^3)}$

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.232

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

01 바탕

다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^3-x^2-2x$, x축

(2) $y=\ln x$, x축, $x=e$

02 실력

삼차함수 $f(x)=x^3-4x^2+5x$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{8}{3}$

03 기본

원점에서 곡선 $y=e^x$에 그은 접선을 l이라고 할 때, 곡선 $y=e^x$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{e}{2}-1$ ② $\frac{e}{2}$ ③ $e-1$
④ e ⑤ $e+1$

04 실력

곡선 $y=\sin 2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=k\cos x$가 이등분하도록 상수 k의 값을 구하여라. $\left(단,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

05 바탕

어떤 그릇에 물을 채우면 물의 깊이가 x cm일 때 수면의 넓이는 (e^x-1) cm^2라고 한다. 깊이가 5 cm일 때 물의 부피를 구하여라.

06 바탕

곡선 $y=1-\sqrt{x}$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체도형의 부피는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{5}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

07 기본

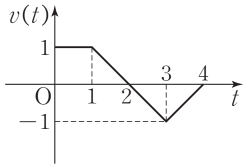
곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$과 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

08 기본

두 곡선 $y=\sqrt{3}\sin x$, $y=\sin x$ $(0\leq x\leq \pi)$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

09 바탕

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는?



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

10 기본

수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=6t-3t^2$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, 시각 $t=0$에서의 위치는 0이다.)

(1) 시각 $t=3$에서의 물체의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 물체의 위치의 변화량

11 기본

평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=\sqrt{3}\sin t+\cos t,\ \ y=\sqrt{3}\cos t-\sin t$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=\frac{3}{2}\pi$까지 움직인 거리를 구하여라.

12 기본

곡선 $f(x)=x\sqrt{x}$의 $x=0$에서 $x=4$까지의 길이는?

① $\frac{8}{27}(5\sqrt{5}-1)$　② $\frac{8}{27}(5\sqrt{5}-2)$　③ $\frac{8}{27}(5\sqrt{5}-3)$

④ $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$　⑤ $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-2)$

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.235

01

정적분 $\int_{0}^{4}|x-2|\,dx$를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02

곡선 $y=-x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

03

정적분

$$\int_{3}^{1}(x-4)(3x+2)dx-\int_{2}^{2}(e^x+\ln x)dx$$

를 구하면?

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

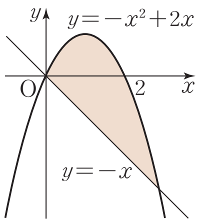
04

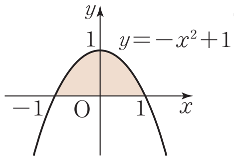
점 $(-1,\ 3)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $(x+1)^2$일 때, $f(3)$의 값은?

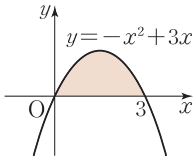
① $\frac{70}{3}$ ② 24 ③ $\frac{73}{3}$
④ 26 ⑤ $\frac{80}{3}$

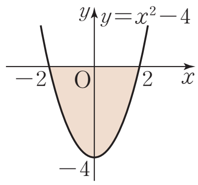
05

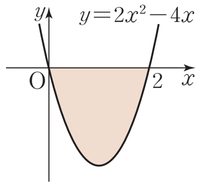
오른쪽 그림의 색칠한 부분은 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$로 둘러싸인 도형을 나타낸 것이다. 다음 중 색칠한 도형의 넓이가 이 도형의 넓이와 같은 것은?

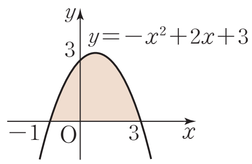


①


②


③


④


⑤


06

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

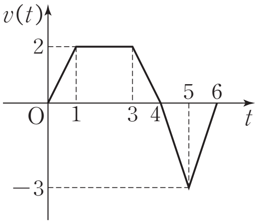
$$f(x+2)=f(x),\ \int_{-1}^{1} f(x)dx=3$$

을 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-5}^{5} f(x)dx$를 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

07

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보 기
ㄱ. 시각 $t=5$일 때의 속력이 가장 크다. ㄴ. 점 P가 움직이는 방향은 출발 후 $t=6$까지 한 번 바뀐다. ㄷ. 시각 $t=6$일 때 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{4+4t^2}\,dt$의 값은?

① 1 ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

09

수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2-1$일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 이 물체가 움직인 거리는?

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{12}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$
④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{22}{3}$

10

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$을 정적분으로 나타낸 것으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\int_a^2 (a+x)^2dx$ ② $\int_a^2 x^2dx$
③ $\int_2^a x^2dx$ ④ $\int_{2-a}^a x^2dx$
⑤ $\int_0^{2-a} (a+x)^2dx$

11

곡선 $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$의 $t=0$에서 $t=\pi$까지의 길이는?

① $\sqrt{2}(e^\pi-2)$　② $\sqrt{2}(e^\pi-1)$　③ $2(e^\pi-2)$　④ $2(e^\pi-1)$　⑤ $2(e^\pi+1)$

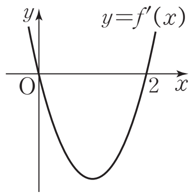
12

정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(\sin x+\cos x)dx$를 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

13

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 포물선이고, $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(3)$의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

14

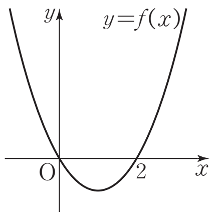
곡선 $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는?

① $\frac{\pi}{12}(\pi+2\sqrt{2})$　② $\frac{\pi}{12}(\pi+3\sqrt{3})$　③ $\frac{\pi}{12}(2\pi+2\sqrt{2})$　④ $\frac{\pi}{12}(2\pi+3\sqrt{3})$　⑤ $\frac{\pi}{12}(2\pi+8)$

15 UP!!

다음 그림은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $g(x)$를

$g(x)=\int_x^{x+1} e^{f(t)}dt$로 정의할 때, $g(x)$의 최솟값은?



① $g(0)$　② $g\left(\frac{1}{2}\right)$　③ $g(1)$　④ $g\left(\frac{3}{2}\right)$　⑤ $g(2)$

16 UP!!

곡선 $y=x^2+1$과 이 곡선 위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선 및 x축의 양의 부분, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{23}{24}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{37}{24}$

17 UP!!

어떤 학생이 자전거를 타기 시작하여 5초까지는 $2t\ \mathrm{m/s^2}$의 가속도로 이동을 하고, 5초가 지난 후에는 일정한 속도로 이동을 한다고 한다. 이때, 이 학생이 자전거로 100 m를 이동하는 데 몇 초가 걸리는가?

① $\frac{19}{3}$초 ② $\frac{20}{3}$초 ③ 7초
④ $\frac{22}{3}$초 ⑤ $\frac{23}{3}$초

18 서술형

구분구적법을 이용하여 곡선 $y=2x^2$과 x축 및 직선 $x=a\ (a>0)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

19 서술형

반지름의 길이가 6 cm인 반구형의 그릇에 물이 가득 들어 있다. 이 그릇에 반지름의 길이가 r cm $(r<6)$인 구슬을 그릇의 바닥에 닿도록 넣었더니 물이 꼭 절반만큼 흘러나왔을 때, r의 값을 구하여라.

20 서술형

직선 궤도 위를 18 m/s의 속도로 달리는 열차가 있다. 이 열차가 브레이크를 걸고 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=18-1.2t$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 이동한 거리를 구하여라.
(2) 브레이크를 건 후 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간을 구하여라.

I 적분법

중단원 평가 문제

▶ 1. 부정적분 / P_31

01 $\int f(x)dx=\sin x+\cos x+C$

의 양변을 미분하면 $f(x)=\cos x-\sin x$

$\therefore f(\pi)=-1-0=-1$

답 ②

02 $y'=-2x+3$이므로

$y=\int(-2x+3)dx=-x^2+3x+C$ ……㉠

㉠이 점 (2, 1)을 지나므로

$1=-2^2+3\times2+C$ $\therefore C=-1$

$\therefore y=-x^2+3x-1$

답 $y=-x^2+3x-1$

03 $\int\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx=\int\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x}dx$

$=\int\left(1-4x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{x}\right)dx$

$=x-\frac{4}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+4\ln|x|+C$

$=x-8\sqrt{x}+4\ln|x|+C$

답 ③

04 (1) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx=\int(1+\cos x)dx$

$=x+\sin x+C$

(2) $\int(2\cot x+3)\sin x\,dx$

$=\int(2\cos x+3\sin x)dx$

$=2\sin x-3\cos x+C$

(3) $\int(2^x-3^x)dx=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{3^x}{\ln 3}+C$

(4) $\int\frac{e^{2x}-4x^2}{e^x+2x}dx=\int\frac{(e^x-2x)(e^x+2x)}{e^x+2x}dx$

$=\int(e^x-2x)dx$

$=e^x-x^2+C$

답 풀이 참조

05 $f(x)=\int 32\sin^4 x\,dx$

$=32\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx$

$=8\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$=8x-16\int\cos 2x\,dx+8\int\cos^2 2x\,dx$

(i) $\int\cos 2x\,dx$에서 $2x=t$로 놓으면 $x=\frac{t}{2}$이

므로 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

$\therefore \int\cos 2x\,dx=\int\cos t\cdot\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{2}\sin t+C_1$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1$

(ii) $\int\cos^2 2x\,dx=\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx$

$4x=s$로 놓으면 $x=\frac{s}{4}$이므로 $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{4}$

$\int\cos^2 2x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\cos s\cdot\frac{1}{4}ds$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin s+C_2$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C_2$

(i), (ii)에 의하여

$f(x)=8x-16\left(\frac{1}{2}\sin 2x+C_1\right)$

$+8\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C_2\right)$

$=12x-8\sin 2x+\sin 4x+C$

(단, $C=-16C_1+8C_2$)

$f(\pi)=10\pi$이므로

$12\pi-0+0+C=10\pi$

$\therefore C=-2\pi$

$\therefore f(x)=12x-8\sin 2x+\sin 4x-2\pi$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=6\pi-0+0-2\pi=4\pi$

답 ④

06 (1) $x^2-1=t$로 놓으면 $\quad 2x\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\therefore \int x(x^2-1)^5dx=\int t^5\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{12}t^6+C$$
$$=\frac{1}{12}(x^2-1)^6+C$$

(2) $\ln x+1=t$로 놓으면 $\ln x=t-1$이므로

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$$

$$\therefore \int\frac{\ln x}{x(\ln x+1)^2}dx$$
$$=\int\frac{t-1}{t^2}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\ln|t|+\frac{1}{t}+C$$
$$=\ln|\ln x+1|+\frac{1}{\ln x+1}+C$$

(3) $(x-\cos x)'=1+\sin x$이므로

$$\int\frac{\sin x+1}{x-\cos x}dx=\int\frac{(x-\cos x)'}{x-\cos x}dx$$
$$=\ln|x-\cos x|+C$$

(4) $\displaystyle\int\frac{5x+12}{x^2+5x+6}dx=\int\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}dx$

에서

$$\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=\frac{m}{x+2}+\frac{n}{x+3}$$

으로 놓고 양변에 $(x+2)(x+3)$을 곱하여 정리하면

$5x+12=(m+n)x+(3m+2n)$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$m+n=5,\ 3m+2n=12$

$\therefore m=2,\ n=3$

따라서 구하는 부정적분은

$$\int\frac{5x+12}{x^2+5x+6}dx$$
$$=\int\left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right)dx$$
$$=2\ln|x+2|+3\ln|x+3|+C$$

답 풀이 참조

07 $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$이므로

$$f(x)=\int\frac{4}{x^2-4}dx=\int\frac{4}{(x-2)(x+2)}dx$$

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{m}{x-2}+\frac{n}{x+2}$$

으로 놓고 양변에 $(x-2)(x+2)$를 곱하여 정리하면 $\quad 4=(m+n)x+(2m-2n)$

$m+n=0,\ 2m-2n=4$

$\therefore m=1,\ n=-1$

$$\therefore f(x)=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$\ln 2-\ln 2+C=0 \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\ln|x-2|-\ln|x+2|$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, a)$를 지나므로

$\therefore a=\ln 1-\ln 3=-\ln 3=\ln\dfrac{1}{3}$

답 ①

08 $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$에서 $f_1(x)=\sin x,\ g_1'(x)=e^x$

으로 놓으면 $\quad f_1'(x)=\cos x,\ g_1(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$에서 $f_2(x)=\cos x,\ g_2'(x)=e^x$

으로 놓으면 $\quad f_2'(x)=-\sin x,\ g_2(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

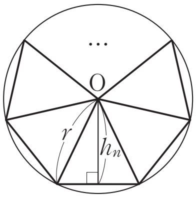
㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x\sin x\,dx$$
$$=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$
$$\therefore \int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$$

답 $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$

▶ 2. 정적분 / P_58

01 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정n각형을 그린 후 원의 중점 O와 정n각형의 각 꼭짓점을 연결하면 n개의 이등변삼각형이 생긴다.



정n각형의 둘레의 길이를 l_n이라 하고 이등변삼각형의 높이를 h_n이라고 하면, 이등변삼각형의 밑변의 길이는 $\dfrac{l_n}{n}$이므로 이등변삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{l_n}{n}\cdot h_n$이다.

여기서 정n각형의 넓이를 S_n이라고 하면

$$S_n=n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l_n}{n}\cdot h_n\right)=\frac{l_nh_n}{2}$$

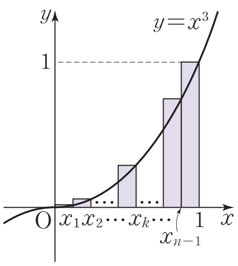
이때, $n\to\infty$이면 $l_n\to 2\pi r$, $h_n\to r$이므로 구하는 원의 넓이를 S라고 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{l_nh_n}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

따라서 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.

답 πr^2

02 아래끝이 0이고 위끝이 1이므로 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$이라고 하면 구간 $[x_{k-1},\ x_k]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이 Δx와 x_k는



$$\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=0+k\Delta x=\frac{k}{n}\ \leftarrow(가)$$

또 $f(x)=x^3$이므로

$$f(x_k)=x_k^{\ 3}=\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

$$f(x_k)\Delta x=\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}=\frac{k^3}{n^4}$$

정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\int_0^1 x^3dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}\leftarrow(나)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\leftarrow(다)$$

답 ①

03 (1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$

$$\left(단,\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

에서 $x_k=1+\dfrac{2k}{n}=1+\dfrac{(3-1)k}{n}$, $\Delta x=\dfrac{2}{n}$

라고 하면 $f(x)=x^4$, $a=1$, $b=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\frac{5}{n}=\frac{5}{2}\int_1^3 x^4dx$$

$$=\frac{5}{2}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3=121$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1=\ln 2$$

답 (1) 121 (2) $\ln 2$

04 (1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_3^x(2t^2+3t-5)dt=2x^2+3x-5$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x\sin t\cos t\,dt=\sin x\cos x$

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\ln t}{t}dt=\dfrac{\ln x}{x}$

답 (1) $2x^2+3x-5$ (2) $\sin x\cos x$
(3) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (4) $\dfrac{\ln x}{x}$

05 ① $\displaystyle\int_0^1 dx=\Big[x\Big]_0^1=1$

② $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_0^1=1$

③ $\displaystyle\int_0^2 x\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^2=2$

④ $\displaystyle\int_1^3\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx=\Big[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\Big]_1^3=1$

⑤ $\displaystyle\int_{-1}^1\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx=\Big[-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\Big]_{-1}^1=1$

답 ③

06 (1) $\displaystyle\int_1^2(3x+2)dx=\Big[\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_1^2=\frac{13}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^3(x-1)^2dx=\int_0^3(x^2-2x+1)dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big]_0^3=3$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi(e^x-\cos x)dx=\Big[e^x-\sin x\Big]_0^\pi=e^\pi-1$

(4) $\displaystyle\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4=\frac{11}{3}$

답 (1) $\dfrac{13}{2}$ (2) 3 (3) $e^\pi-1$ (4) $\dfrac{11}{3}$

07 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$이므로

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx-\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx-\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx-\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=2$

답 ⑤

08 $\{f(x)\}^2=(x^2+ax+b)^2$
$=x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2$

이므로

$\displaystyle\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1\{x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2\}dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1\{x^4+(a^2+2b)x^2+b^2\}dx$

$\displaystyle+\int_{-1}^1(2ax^3+2abx)dx$

이때, $y=x^4+(a^2+2b)x^2+b^2$은 우함수이고,
$y=2ax^3+2abx$는 기함수이므로
(주어진 식)

$\displaystyle=2\int_0^1\{x^4+(a^2+2b)x^2+b^2\}dx$

$\displaystyle=2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{a^2+2b}{3}x^3+b^2x\Big]_0^1$

$\displaystyle=2\left(\frac{1}{3}a^2+b^2+\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}\right)$

$\displaystyle=2\left\{\frac{1}{3}a^2+\left(b+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{45}\right\}$

따라서 $a=0,\ b=-\dfrac{1}{3}$일 때,

$\displaystyle\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx$는 최솟값 $\dfrac{8}{45}$을 가진다.

$\therefore ab=0$

답 ③

09 (1) $e^x+1=t$로 놓으면 $e^x\dfrac{dx}{dt}=1$

또 $-2\le x\le 2$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이고 $x=-2$일 때 $t=e^{-2}+1,\ x=2$일 때 $t=e^2+1$이므로

$\displaystyle\int_{-2}^2\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{e^{-2}+1}^{e^2+1}\frac{1}{t}dt$

$\displaystyle=\Big[\ln|t|\Big]_{e^{-2}+1}^{e^2+1}$

$=\ln(e^2+1)-\ln(e^{-2}+1)$

$=\ln\dfrac{e^2+1}{e^{-2}+1}$

$=\ln e^2=2$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$라고 하면
$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$
$$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

답 (1) 2 (2) $\frac{\pi}{2}-1$

10 $\displaystyle\int_0^2\{f(x)+f(4-x)\}dx$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(4-x)dx$$

이때, $\displaystyle\int_0^2 f(4-x)dx$에서 $4-x=t$로 놓으면

$$-\frac{dx}{dt}=1$$

또 $0\le x\le 2$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이고 $x=0$일 때 $t=4$, $x=2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^2 f(4-x)dx=\int_4^2 f(t)\cdot(-1)dt=\int_2^4 f(t)dt$$

$\therefore$ (주어진 식)$\displaystyle=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(t)dt$

$$=\int_0^4 f(x)dx$$

답 ③

11 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$f(x)=\ln(1+x)$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $g(x)=x$이므로

(주어진 식)

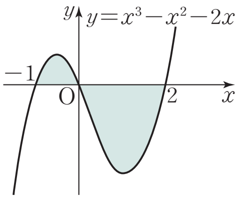
$$=\Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$$
$$=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$=\ln 2-\Big[x-\ln|1+x|\Big]_0^1=2\ln 2-1$$

답 ⑤

▶ 3. 정적분의 활용 / P_85

01 (1) $y=x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2)$

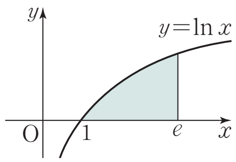
그러므로 곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



구간 $[-1,\ 0]$에서 $y=x^3-x^2-2x\ge 0$, 구간 $[0,\ 2]$에서 $y=x^3-x^2-2x\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{37}{12}$$

(2) 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



구간 $[1,\ e]$에서 $y=\ln x\ge 0$이므로 구하는 넓이 S는 $\displaystyle S=\int_1^e\ln x\,dx$

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$S=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot x\,dx=e-\Big[x\Big]_1^e=1$$

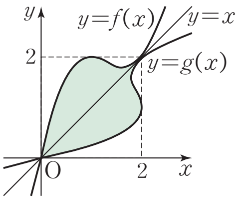
답 (1) $\frac{37}{12}$ (2) 1

02 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $x^3-4x^2+5x=x$에서

$x^3-4x^2+4x=0$, $x(x-2)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



구하는 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이고, 구간 $[0,\ 2]$에서 $x^3-4x^2+5x\ge x$이므로

$$S=2\int_0^2 \{(x^3-4x^2+5x)-x\}dx$$

$$=2\int_0^2 (x^3-4x^2+4x)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

답 ⑤

03 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$과 직선 l의 접점을 $\mathrm{P}(a,\ e^a)$이라고 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 e^a이다.

그러므로 직선 l의 방정식은

$y-e^a=e^a(x-a)$

$\therefore y=e^ax+(1-a)e^a$

직선 l이 원점을 지나므로

$(1-a)e^a=0$

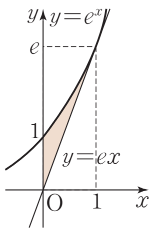
$\therefore a=1$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=ex$이고 접점의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ e)$이다.

이때, 구간 $[0,\ 1]$에서

$e^x\ge ex$

이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^1 (e^x-ex)dx$$

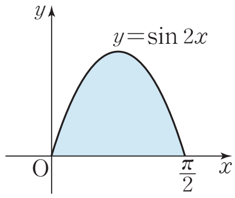
$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

답 ①

04 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서

$y=\sin 2x\ge 0$

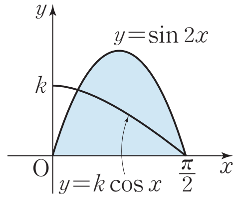
이므로 이 도형의 넓이 S_1은



$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

곡선 $y=k\cos x$가 $y=\sin 2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\sin 2x=k\cos x$에서 $\quad\cos x(2\sin x-k)=0$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

$\cos x=0$ 또는 $2\sin x-k=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{k}{2}$

두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$의 교점 중 x좌표가 $\frac{\pi}{2}$가 아닌 다른 교점의 x좌표를 a라고 하면

$\sin a=\frac{k}{2}$

구간 $\left[a,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $\sin 2x\ge k\cos x$이므로 두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_2는

$$S_2=\int_a^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x-k\cos x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\sin^2 a+k\sin a-k+1$$

$$=-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}-k+1=\frac{k^2}{4}-k+1$$

$S_1=2S_2$이므로

$1=2\left(\frac{k^2}{4}-k+1\right)$, $k^2-4k+2=0$

$\therefore k=2-\sqrt{2}\ \left(\because 0<k<\frac{\pi}{2}\right)$

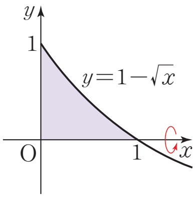
답 $2-\sqrt{2}$

05 물의 깊이가 x cm일 때 수면의 넓이 $S(x)$가 $S(x)=e^x-1\,(\text{cm}^2)$이므로 구하는 물의 부피 V는

$$V=\int_0^5 (e^x-1)dx$$
$$=\left[e^x-x\right]_0^5=e^5-6\ (\text{cm}^3)$$

답 (e^5-6) cm^3

06

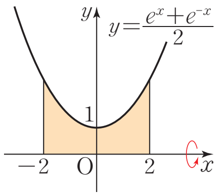


위의 그림에서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2dx$$
$$=\pi\int_0^1 (1-2\sqrt{x}+x)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

답 ⑤

07

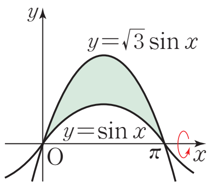


위의 그림에서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_{-2}^2 \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx$$
$$=2\pi\int_0^2 \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^4+8-e^{-4})$$

답 $\frac{\pi}{4}(e^4+8-e^{-4})$

08 구하는 회전체의 부피 V는 곡선 $y=\sqrt{3}\sin x$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피에서 곡선



$y=\sin x$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로

$$V=\pi\int_0^\pi (\sqrt{3}\sin x)^2dx-\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^\pi 2\sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\pi^2$$

답 π^2

09 점 P가 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=0$, $t=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\times(1+2)\times1+\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{5}{2}$$

답 ②

10 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 0이므로 시각 $t=3$에서의 물체의 위치는

$$x(3)=0+\int_0^3 (6t-3t^2)dt$$
$$=\left[3t^2-t^3\right]_0^3=0$$

(2) 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 물체의 위치의 변화량은

$$\int_1^4 (6t-3t^2)dt=\left[3t^2-t^3\right]_1^4$$
$$=(48-64)-(3-1)$$
$$=-18$$

답 (1) 0 (2) -18

11 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cos t-\sin t$,

$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{3}\sin t-\cos t$

이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=\frac{3}{2}\pi$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{(\sqrt{3}\cos t-\sin t)^2+(-\sqrt{3}\sin t-\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{4}\,dt$$
$$=\left[2t\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}=3\pi$$

답 3π

12 $f(x)=x\sqrt{x}$에서 $\quad f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

$1+\frac{9}{4}x=t$로 놓으면 $x=\frac{4}{9}t-\frac{4}{9}$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{4}{9}$$

또 $0\le x\le 4$에서 x의 값과 t의 값은 일대일 대응이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=10$이므로

$$l=\int_1^{10}\sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}dt$$

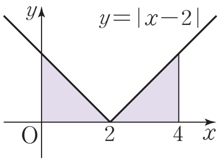
$$=\left[\frac{8}{27}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10}=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

답 ④

대단원 평가 문제 p.88~91

01 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x\ge 2)\\ -x+2 & (x\le 2)\end{cases}$$



따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_0^4|x-2|dx$$

$$=\int_0^2(-x+2)dx+\int_2^4(x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^4=4$$

답 ④

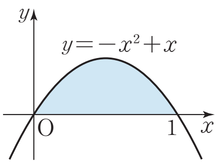
02 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+x=0$에서

$x=0,\ x=1$

이때, 구간 $[0,\ 1]$에서

$-x^2+x\ge 0$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^1(-x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

답 ①

03 $\int_3^1(x-4)(3x+2)dx-\int_2^2(e^x+\ln x)dx$

$$=\int_1^3(-3x^2+10x+8)dx-0$$

$$=\left[-x^3+5x^2+8x\right]_1^3=30$$

답 ②

04 $f'(x)=(x+1)^2$이므로

$$f(x)=\int(x+1)^2dx$$

$$=\int(x^2+2x+1)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$$

점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$$\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2+(-1)+C=3$$

$$\therefore C=\frac{10}{3}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+\frac{10}{3}$$

$$\therefore f(3)=\frac{1}{3}\cdot3^3+3^2+3+\frac{10}{3}=\frac{73}{3}$$

답 ③

05 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=-x$에서

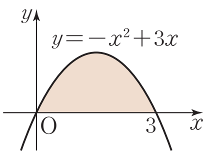
$x=0,\ x=3$

구간 $[0,\ 3]$에서 $-x^2+2x\ge -x$이므로 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^3\{(-x^2+2x)-(-x)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$

이것은 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



답 ②

06 $f(x+2)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\int_{-5}^{-3} f(x)dx=\int_{-3}^{-1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$=\int_{1}^{3} f(x)dx=\int_{3}^{5} f(x)dx=3$$
$$\therefore \int_{-5}^{5} f(x)dx=\int_{-5}^{-3} f(x)dx+\int_{-3}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{5} f(x)dx$$
$$=3\times5=15$$

답 ③

07 ㄱ. $|v(t)|$의 값이 가장 큰 것은 $t=5$일 때이다. (참)

ㄴ. 점 P의 운동 방향은 $v(t)=0$일 때 바뀐다. 즉, $t=4$일 때 한 번 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 $t=4$일 때의 위치는

$\frac{1}{2}\times(2+4)\times2=6$

시각 $t=6$일 때의 위치는

$6-\frac{1}{2}\times2\times3=6-3=3$

따라서 시각 $t=6$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있지 않다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

08 $f(t)=\sqrt{4+4t^2}$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{4+4t^2}dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=\sqrt{4}=2$$

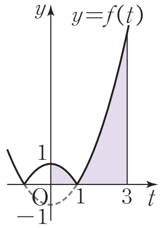
답 ②

09 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^3|t^2-1|dt$$

$f(t)=|t^2-1|$이라고 하면

$$f(t)=\begin{cases} t^2-1 & (t\le-1 \text{ 또는 } t\ge1) \\ -t^2+1 & (-1\le t\le1)\end{cases}$$



따라서 구간을 나누어 계산하면

$$\int_0^3|t^2-1|dt=\int_0^1(-t^2+1)dt+\int_1^3(t^2-1)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^3=\frac{22}{3}$$

답 ⑤

10 (i) $x=\frac{(2-a)k}{n}$라고 하면

$k=0$일 때 $x=0$, $k=n$일 때 $x=2-a$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$
$$=\int_0^{2-a}(a+x)^2dx$$

(ii) $x=a+\frac{(2-a)k}{n}$라고 하면

$k=0$일 때 $x=a$, $k=n$일 때 $x=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$
$$=\int_a^2x^2dx$$

(i), (ii)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$
$$=\int_0^{2-a}(a+x)^2dx=\int_a^2x^2dx$$

답 ②, ⑤

11 $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=e^t(\sin t+\cos t),\ \frac{dy}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2+\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2$$
$$=e^{2t}(1+2\sin t\cos t)+e^{2t}(1-2\sin t\cos t)$$
$$=2e^{2t}$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^t\,dt$$

$$=\sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^{\pi}=\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$$

답 ②

12 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}(\sin x+\cos x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$에서

$f(x)=e^{-x}$, $g'(x)=\sin x$라고 하면

$f'(x)=-e^{-x}$, $g(x)=-\cos x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$

$=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx$

$=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx=1$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}(\sin x+\cos x)dx=1$

답 ④

13 $f'(x)=ax(x-2)\,(a>0)$로 놓으면

$f(x)=\int ax(x-2)dx$

$\quad=\int(ax^2-2ax)dx$

$\quad=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지고, $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=4$, $f(2)=0$

$f(0)=4$에서

$C=4$ ……㉠

$f(2)=0$에서

$\frac{8}{3}a-4a+C=0$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{8}{3}a-4a+4=0 \qquad \therefore a=3$

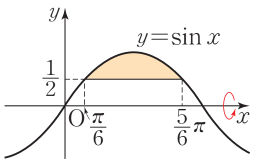
$\therefore f(x)=x^3-3x^2+4$

$\therefore f(3)=3^3-3\times3^2+4=4$

답 ④

14 구간 $[0,\ \pi]$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{5}{6}\pi$



구하는 회전체의 부피 V는 구간 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right]$에서 곡선 $y=\sin x$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피에서 직선 $y=\frac{1}{2}$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로

$V=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin^2x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2dx$

$\quad=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{4}\right)dx$

$\quad=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$

$\quad=\pi\Big[\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$

$\quad=\pi\left\{\left(\frac{5}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$

$\quad=\frac{\pi}{12}(2\pi+3\sqrt{3})$

답 ④

15 $y=f(x)$의 x절편이 0, 2이므로

$f(x)=ax(x-2)\,(a>0)$

$g(x)=\int_x^{x+1} e^{at(t-2)}dt$를 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=e^{a(x+1)(x-1)}-e^{ax(x-2)}$

$\quad =e^{ax^2-a}(1-e^{a-2ax})$

$g'(x)=0$에서

$1=e^{a-2ax}$

$a(1-2x)=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

$a>0$이므로 $x<\frac{1}{2}$일 때 $\qquad g'(x)<0$

$x>\frac{1}{2}$일 때 $\qquad g'(x)>0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이고 최소이므로 최솟값은 $g\left(\frac{1}{2}\right)$이다.

답 ②

16 $f(x)=x^2+1$이라고 하면 $f'(x)=2x$이므로 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=4$

따라서 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 방정식은

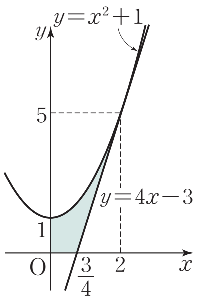
$y-5=4(x-2)$, 즉 $y=4x-3$

직선 $y=4x-3$과 x축의 교점의 x좌표는

$4x-3=0$에서

$x=\frac{3}{4}$

그러므로 곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=4x-3$을 좌표평면 위에 함께 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, 구간 $\left[0, \frac{3}{4}\right]$에서 $x^2+1\ge 0$이고 구간 $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$에서 $x^2+1\ge 4x-3$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{3}{4}}(x^2+1)dx+\int_{\frac{3}{4}}^{2}\{x^2+1-(4x-3)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}}(x^2+1)dx+\int_{\frac{3}{4}}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^{\frac{3}{4}}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{\frac{3}{4}}^{2}=\frac{37}{24}$$

답 ⑤

17 t초 후의 자전거의 속도를 $v(t)$ m/s, 위치를 $s(t)$ m라고 하면

(i) $0\le t\le 5$일 때

$v(t)=0+\int_0^t 2t\,dt=t^2$

$s(t)=0+\int_0^t t^2dt=\frac{1}{3}t^3$

(ii) $t\ge 5$일 때

$v(t)=v(5)=25$

$s(5)=\frac{1}{3}\times 5^3=\frac{125}{3}$이므로

$s(t)=\frac{125}{3}+\int_0^{t-5}25\,dt$

$\quad =\frac{125}{3}+\left[25t\right]_0^{t-5}=25t-\frac{250}{3}$

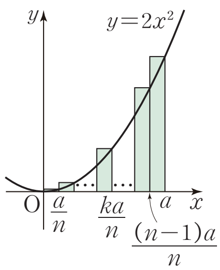
따라서 학생이 자전거로 100 m를 이동하는데 걸리는 시간은

$25t-\frac{250}{3}=100 \qquad \therefore t=\frac{22}{3}$(초)

답 ④

18 1단계 **구간 $[0, a]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표와 y좌표를 구한다.**

구간 $[0, a]$를 n등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례대로



$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \cdots, \frac{ka}{n}$

$\cdots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n}$

이때의 y의 좌표는 차례대로

$0, 2\left(\frac{a}{n}\right)^2, 2\left(\frac{2a}{n}\right)^2, \cdots, 2\left(\frac{ka}{n}\right)^2, \cdots,$

$2\left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2, 2\left(\frac{na}{n}\right)^2$

2단계 직사각형의 넓이의 합을 구한다.

k번째 직사각형의 넓이는 $\frac{a}{n}\cdot 2\left(\frac{ka}{n}\right)^2$이므로 앞의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{a}{n}\cdot 2\left(\frac{ka}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{2a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{2a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3단계 도형의 넓이를 구한다.

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}=\frac{2}{3}a^3$$

답 $\frac{2}{3}a^3$

19 **1단계** 물과 구슬의 부피를 구하고 $r>3$임을 보인다.

물의 부피와 구슬의 부피를 각각 V_1, V_2라고 하면

$$V_1=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 6^3=144\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$
$$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3\ (\mathrm{cm}^3)$$

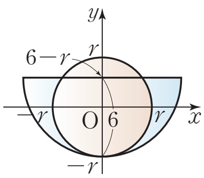
만약 $r\leq 3$이라고 하면 $r^3\leq 27$이므로

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{r^3}{108}\leq\frac{1}{4}$$

즉, V_2는 V_1의 절반 이하이므로 $r>3$이어야 한다.

2단계 구슬이 물에 잠긴 부분의 부피를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 구슬의 중심을 지나는 단면을 구슬의 중심을 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓자.



구슬이 물에 잠긴 부분은 곡선 $x^2+y^2=r^2$과 y축 및 직선 $y=6-r$로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체도형과 같으므로 이 도형의 부피를 V_3이라고 하면

$$V_3=\pi\int_{-r}^{6-r}(\sqrt{r^2-y^2})^2dy$$
$$=\pi\int_{-r}^{6-r}(r^2-y^2)dy$$
$$=\pi\left[r^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-r}^{6-r}$$
$$=\pi\left[\left\{r^2(6-r)-\frac{1}{3}(6-r)^3\right\}-\left(-r^3+\frac{1}{3}r^3\right)\right]$$
$$=36(r-2)\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

3단계 r의 값을 구한다.

$V_1=2V_3$이므로

$144\pi=2\times 36(r-2)\pi$

$\therefore r=4\ (\mathrm{cm})$

답 4 cm

20 **1단계** 완전히 정지할 때까지 걸린 시간을 구한다.

(1) 열차가 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=18-1.2t=0$

$\therefore t=15$

즉, 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 걸린 시간은 15초이다.

2단계 이동한 거리를 구한다.

이때, 이동한 거리는

$$\int_0^{15}(18-1.2t)dt=\left[18t-0.6t^2\right]_0^{15}$$
$$=270-135=135\ (\mathrm{m})$$

3단계 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간을 구한다.

(2) 120 m 이동하는 데 t초 걸린다고 하면

$$\int_0^{t}(18-1.2t)dt=\left[18t-0.6t^2\right]_0^{t}$$
$$=18t-0.6t^2=120$$

에서

$t^2-30t+200=0$

$(t-10)(t-20)=0$

$\therefore t=10$ 또는 $t=20$

그런데 (1)에서 $0<t<15$이므로 열차가 브레이크를 건 후 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간은 10초이다.

답 (1) 135 m (2) 10 초

Ⅱ 순열과 조합

1 순열, 조합과 이항정리

봉화는 통신 수단으로 오랫동안 사용되었다. 여러 개의 굴뚝으로 이루어진 봉수대에서 만들 수 있는 다양한 신호를 사용하여 나라의 곳곳에서 일어나는 위급한 상황을 전달할 수 있었다.

단원의 흐름

이미 배운 내용

▶**중학교 2학년**
- 경우의 수

▶**고등학교 수학**
- 다항식의 전개
- 순열과 조합

이번에 배울 내용

- 중복순열
- 원순열
- 같은 것이 있는 순열
- 중복조합
- 이항정리

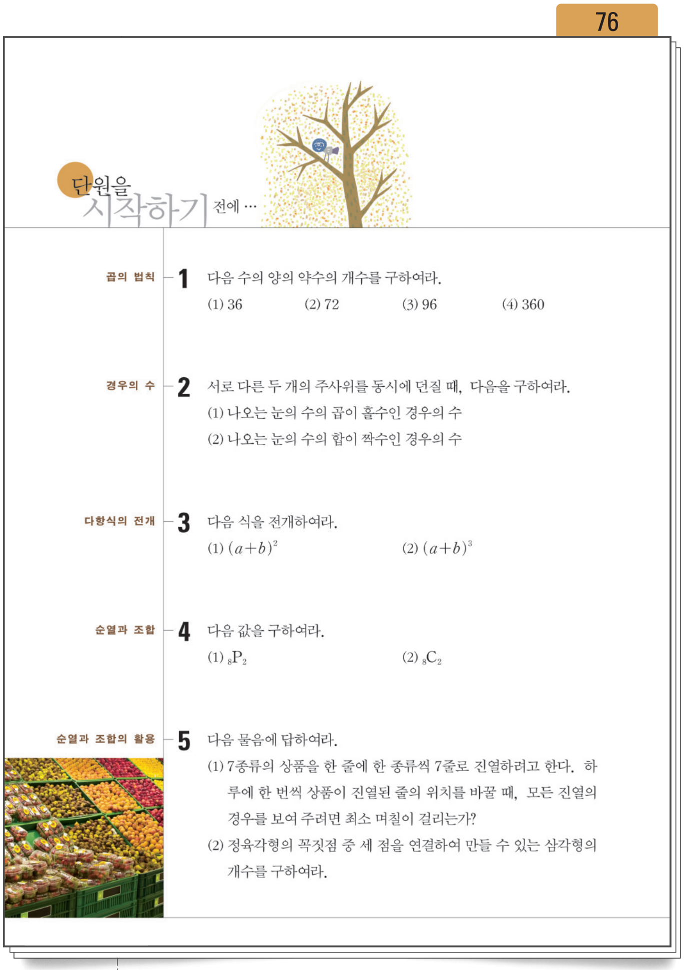
다음에 배울 내용

▶**적분과 통계**
- 이항분포

수원 화성의 봉수대

이 단원의 학습 목표

1. 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
2. 원순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
3. 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
4. 이항정리를 이해한다.
5. 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
6. 파스칼의 삼각형을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.



76

단원을 시작하기 전에 …

곱의 법칙

1 다음 수의 양의 약수의 개수를 구하여라.

(1) 36 (2) 72 (3) 96 (4) 360

경우의 수

2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수

(2) 나오는 눈의 수의 합이 짝수인 경우의 수

다항식의 전개

3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^2$ (2) $(a+b)^3$

순열과 조합

4 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_8P_2$ (2) ${}_8C_2$

순열과 조합의 활용

5 다음 물음에 답하여라.

(1) 7종류의 상품을 한 줄에 한 종류씩 7줄로 진열하려고 한다. 하루에 한 번씩 상품이 진열된 줄의 위치를 바꿀 때, 모든 진열의 경우를 보여 주려면 최소 며칠이 걸리는가?

(2) 정육각형의 꼭짓점 중 세 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

단원을 시작하기 전에 ……………………• 풀이

1 (1) $36=2^2\times3^2$이므로 양의 약수의 개수는 $(2+1)(2+1)=\mathbf{9}$(개)이다. 구체적으로 36의 약수는 $2^0\times3^0$, $2^1\times3^0$, $2^2\times3^0$, $2^0\times3^1$, $2^1\times3^1$, $2^2\times3^1$, $2^0\times3^2$, $2^1\times3^2$, $2^2\times3^2$이다.

(2) $72=2^3\times3^2$이므로 양의 약수의 개수는 $(3+1)(2+1)=\mathbf{12}$(개)이다. 구체적으로 72의 약수는 2^0, 2^1, 2^2, 2^3의 4가지와 3^0, 3^1, 3^2의 3가지의 곱으로 표시된다.

(3) $96=2^5\times3$이므로 양의 약수의 개수는 $(5+1)(1+1)=\mathbf{12}$(개)이다.

(4) $360=2^3\times3^2\times5$이므로 양의 약수의 개수는 $(3+1)(2+1)(1+1)=\mathbf{24}$(개)이다.

2 (1) 두 수의 곱이 홀수가 되기 위해서는 (홀수)×(홀수)이어야 한다. 한 개의 주사위에서 홀수는 1, 3, 5의 3가지이므로 구하는 경우의 수는 $3\times3=\mathbf{9}$(가지)이다.

(2) 두 수의 합이 짝수가 되기 위해서는 (짝수)+(짝수) 또는 (홀수)+(홀수)이어야 한다. 그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times3+3\times3=\mathbf{18}$(가지)이다.

3 (1) $(a+b)^2=\boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$

(2) $(a+b)^3=\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

4 (1) ${}_8P_2=8\times7=\mathbf{56}$

(2) ${}_8C_2=\dfrac{{}_8P_2}{2!}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=\mathbf{28}$

5 (1) 서로 다른 7개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_7P_7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{5040}$(일)

(2) 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=\mathbf{20}$(개)

1 순열, 조합과 이항정리

이 단원을 배우면

- 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
- 이항정리를 이해할 수 있다.
- 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

소단원의 학습 목표

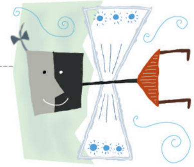
1. 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
2. 원순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
3. 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

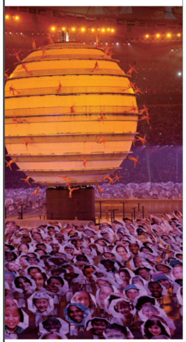
중복순열, ${}_{n}\Pi_{r}$, **원순열**

1 중복순열과 원순열

학습 목표
- 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- 원순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.



다 가 서 기 / **공 위에 일렬로 서 있기**



사물을 일렬로 배열하는 경우의 수와 둥글게 배열하는 경우의 수는 다르다. 일렬로 배열할 때에는 앞, 뒤의 구분이 있지만 둥글게 배열할 때에는 앞, 뒤의 구분이 없기 때문이다.

다가서기 / 해설

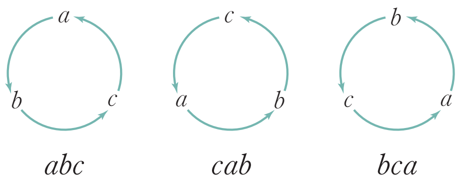
세 개의 문자 a, b, c를 일렬로 배열하는 경우와 둥글게 배열하는 경우를 살펴보자.

세 개의 문자 a, b, c를 일렬로 배열하는 경우는

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$$

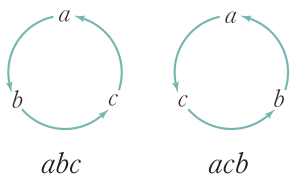
로 그 경우의 수는 6가지이다.

그런데 세 개의 문자 a, b, c를 다음과 같이 배열하면 하나의 경우에서 회전하였을 때 다른 경우와 서로 같아지므로 모두 같은 순열이다.



즉, 둥글게 배열하는 경우는 앞, 뒤의 구분이 없기 때문에 일렬로 배열하는 경우에서 문자열의 앞(또는 뒤)의 문자를 문자열의 뒤(또는 앞)로 이동하여도 이동하기 전의 배열과 서로 같다.

그러므로 세 개의 문자 a, b, c를 둥글게 배열하는 경우는



로 그 경우의 수는 2가지이다.

따라서 세 개의 문자 a, b, c를 일렬로 배열하는 경우의 수와 둥글게 배열하는 경우의 수는 서로 다르다.

79

01 중복순열

탐구하기 / 같은 숫자가 들어 있는 세 자리의 자연수 찾기

세 자리의 자연수에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자가 모두 같은 것의 개수를 구하여라.
2. 119, 717 등과 같이 두 개의 숫자가 같은 것의 개수를 구하여라.

알아보기 / 중복순열의 뜻을 알아보고, 그 순열의 수를 구하여 보자.

중복을 허용하여 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4로 세 자리의 자연수를 만들 때, 각 자리에 올 수 있는 숫자는

백의 자리: 1, 2, 3, 4
십의 자리: 1, 2, 3, 4
일의 자리: 1, 2, 3, 4

백 십 일
4가지 4가지 4가지

이다. 따라서 곱의 법칙에 의하여 만들 수 있는 경우의 수는 다음과 같다.

$4\times4\times4=4^3=64$(가지)

1 2 … r
n가지 n가지 … n가지

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 순열을 **중복순열**이라 하고, 그 수를 기호로

$${}_n\Pi_r$$

와 같이 나타낸다. 이때, 중복순열의 수는 다음과 같다.

Π는 곱을 나타내는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자이다.

${}_n\Pi_r$에서는 $n<r$인 경우도 있다.

중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r=n^r$$

스스로 하기 / 익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

1 중복을 허용하여 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

탐구하기 / 풀이

1. 세 자리의 자연수 중에서 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자가 모두 같은 것은
111, 222, 333, 444, 555,
666, 777, 888, 999
의 **9**개이다.

2. (ⅰ) 같은 두 개의 숫자가 0인 경우
100, 200, 300, 400, 500,
600, 700, 800, 900
의 9가지가 있다.

(ⅱ) 같은 두 개의 숫자가 1인 경우
세 개의 숫자 중 나머지 한 개는
0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
중 하나이다.

① 나머지 한 개가 0인 경우
110, 101의 2가지가 있다.

② 나머지 한 개가 0이 아닌 경우
예를 들어 2를 생각하면 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 방법은
112, 121, 211
의 3가지이다.
그러므로 이러한 경우의 수는
$3\times8=24$(가지)

①과 ②에서 같은 두 개의 숫자가 1인 경우의 수는
$2+24=26$(가지)

(ⅲ) 같은 두 개의 숫자가 2, 3, …, 9인 경우에도 (ⅱ)와 같은 방법으로 각각 26가지의 경우가 있다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $9+26\times9=$ **243**(개)

알아보기 / 해설

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열 ${}_nP_r$에서 $n\geq r$이어야 한다. 그러나 중복순열은 중복을 허용하기 때문에 ${}_n\Pi_r$에서 $n<r$인 경우도 있다.

스스로 하기 / 풀이

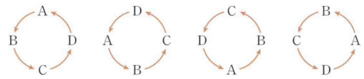
1 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지이다.
그 각각에 대하여 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4이다. 즉, 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열이므로
${}_5\Pi_2=5^2$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times5^2=$ **100**(개)

02 원순열

알 아 보 기 / 원순열의 뜻을 알아보고, 그 순열의 수를 구하여 보자.

둥근 식탁에 4명의 가족이 둘러앉아 식사를 하려고 한다. 식탁에 둘러앉는 경우의 수를 알아보자.

가족 4명을 각각 A, B, C, D로 나타내면 다음의 4가지 경우는 위치 관계가 서로 같으므로 같은 순열이다.



ABCD DABC CDAB BCDA

즉, 네 사람을 한 줄로 배열하는 순열의 수는 $_4P_4$이지만 이것을 원형으로 배열할 때에는 위와 같이 4가지씩 같은 것이 생긴다. 따라서 4명의 가족이 둥근 식탁에 둘러앉는 경우의 수는 다음과 같다.

n명을 원형으로 배열할 때에는 n가지씩 같은 것이 생긴다.

$$\frac{_4P_4}{4}=\frac{4!}{4}=(4-1)!=3!=6(\text{가지})$$

일반적으로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열을 **원순열**이라고 한다. 이때, 원순열의 수는 다음과 같다.

원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

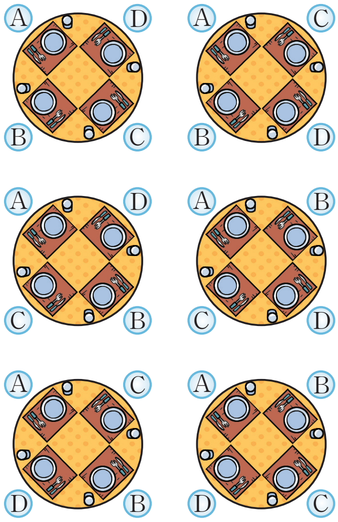
$$\frac{_nP_n}{n}=(n-1)!$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

1 남자 3명, 여자 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.
(1) 남녀 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수
(2) 남자, 여자가 교대로 둘러앉는 경우의 수

알아보기 / 해설

원탁의 위치는 고정되어 있지만 네 사람의 위치 관계가 서로 같으면 같은 경우로 보고 이로부터 원순열을 구하면 다음과 같다.



네 사람을 일렬로 배열하는 순열의 수는 $4!$이지만 이것을 위의 그림처럼 원형으로 배열할 때는 다음 표에서와 같이 서로 다른 4개의 순열이 동일한 원순열을 이룬다.

일렬로 배열하는 순열	원순열
ABCD, DABC, CDAB, BCDA	ABCD
ABDC, CABD, DCAB, BDCA	ABDC
ACBD, DACB, BDAC, CBDA	ACBD
ACDB, BACD, DBAC, CDBA	ACDB
ADBC, CADB, BCAD, DBCA	ADBC
ADCB, BADC, CBAD, DCBA	ADCB
$4!$가지	$\frac{4!}{4}$가지

따라서 원형으로 배열하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$\frac{4!}{4}=3!=6(\text{가지})$$

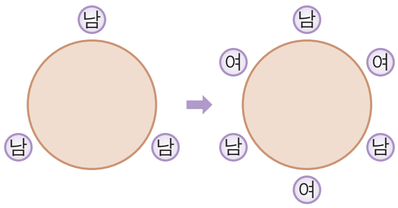
이와 같이 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 6명을 원형으로 배열하는 원순열의 수이므로

$$\frac{6!}{6}=5!=\mathbf{120}(\text{가지})$$

(2) 먼저 남자 3명을 같은 간격으로 앉힌 다음, 남자와 남자 사이에 여자 3명을 앉히면 된다.



따라서 구하는 경우의 수는

$(3-1)!\times 3!=2\times 6=\mathbf{12}(\text{가지})$

81

03 같은 것이 있는 순열

알 아 보 기 / 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 모양이 같은 보라색 깃발 3개, 노란색 깃발 2개를 게양하여 모두 몇 가지 신호를 만들 수 있는지 생각하여 보자.

보라색 깃발을 a, 노란색 깃발을 b로 나타내면

$$a,\ a,\ a,\ b,\ b$$

이고, 구하는 경우의 수는 이를 일렬로 배열하는 순열의 수를 구하는 것과 같다.

3개의 a를 a_1, a_2, a_3, 2개의 b를 b_1, b_2로 구분하여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2$$

로 나타내면 이를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $5!$이다.

이때, 다음 그림과 같은 $3!\times2!$가지의 순열은 번호의 구별이 없으면 모두 $aaabb$와 같은 순열이다.

$$\underbrace{3!\left\{\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_1 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_1 & b_2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_2 & b_1 \\ a_1 & a_3 & a_2 & b_2 & b_1 \\ a_2 & a_1 & a_3 & b_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \end{array}}_{2!}$$

또 $aabab$ 등의 다른 경우에 대해서도 위와 마찬가지로 각각 $3!\times2!$가지의 같은 순열이 생기므로 만들 수 있는 신호의 개수는

$$\frac{5!}{3!2!}=10(\text{개})$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 같은 것이 있는 순열의 수는 다음과 같다.

같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, r개, $\cdots$일 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}\ (\text{단, } p+q+r+\cdots=n)$$

또 n개 중에서 a가 p개, b가 q개, c가 r개$(p+q+r=n)$ 있을 때, 이 순열의 수를 N이라고 하면

$$\underbrace{\underbrace{a,\ a,\ \cdots,\ a}_{p\text{개}},\ \underbrace{b,\ b,\ \cdots,\ b}_{q\text{개}},\ \underbrace{c,\ c,\ \cdots,\ c}_{r\text{개}}}_{n\text{개}}$$

$$N\times p!\times q!\times r!=n!$$

$$\therefore N=\frac{n!}{p!q!r!}(\text{단, } n=p+q+r)$$

즉, n개 중에서 같은 것이 한 종류가 p개 있을 때의 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!}$(가지)이고, 이것을 확장하여 같은 것이 두 종류가 각각 p개, q개, 세 종류가 각각 p개, q개, r개, $\cdots$ 있을 때의 순열의 수는 각각 $\dfrac{n!}{p!q!}$, $\dfrac{n!}{p!q!r!}$, $\cdots$이다.

알아보기 / 해설

- 같은 것이 있는 순열의 수

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}\ (p+q+r+\cdots=n)$$

은 $p=q=r=\cdots=1$일 때의 순열의 수 ${}_nP_n=n!$을 일반화한 것이다.

- 같은 것이 있는 순열의 수에서 $p+q+r+\cdots=n$임에 주의한다.
- 서로 다른 n개를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $n!$이다. 그런데 이 중에서 p개를 같은 것으로 보고 이들 n개의 순열의 수를 N이라고 하면

$$N\times p!=n!$$

$$\therefore N=\frac{n!}{p!}$$

보충 학습

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개$(p+q=n)$있을 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수 $\dfrac{n!}{p!q!}$은 조합을 이용하여 ${}_nC_p$(또는 ${}_nC_q$)로 구할 수도 있다.

$${}_nC_p=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{p!q!}\quad(\text{단, } p+q=n)$$

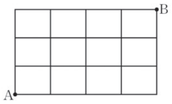
$${}_nC_p={}_nC_{n-p}={}_nC_q$$

예를 들어 본문에서 보라색 깃발 3개, 노란색 깃발 2개를 일렬로 배열할 때, 2개의 노란색 깃발을 놓을 자리를 정하면 3개의 보라색 깃발을 놓을 자리는 자동으로 정해진다. 따라서 이 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수 ${}_5C_2=10$(개)와 같다.

82

함 께 하 기 / 익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

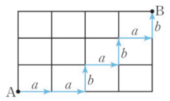
1 오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 B 지점까지 가려고 할 때, 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여라.



최단 거리로 가야하므로 오른쪽과 위쪽으로만 움직여야 한다.

풀이

오른쪽 그림과 같이 가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b로 놓으면, A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 4개의 a, 3개의 b를 일렬로 배열하는 순열과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!3!}=35(\text{가지})$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

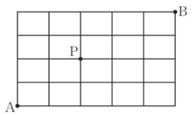
같은 문자가 몇 개씩 있는지를 조사한다.

1 다음 단어를 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

(1) coffee (2) success (3) statistics

2 10명의 학생에게 세 가지 공연 A, B, C의 입장권을 나누어 주려고 한다. A 공연 입장권이 5장, B 공연 입장권이 2장, C 공연 입장권이 3장 있을 때, 입장권을 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

3 오른쪽 그림과 같은 도로가 있을 때, 다음을 구하여라.



(1) A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

(2) A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 2개의 f, 2개의 e, 1개의 c, 1개의 o를 일렬로 배열하는 순열이므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{(2+2+1+1)!}{2!2!1!1!}$$

$$=\frac{6!}{2!2!1!1!}=\mathbf{180}(\text{가지})$$

(2) 3개의 s, 2개의 c, 1개의 u, 1개의 e를 일렬로 배열하는 순열이므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!2!1!1!}=\mathbf{420}(\text{가지})$$

(3) 3개의 s, 3개의 t, 2개의 i, 1개의 a, 1개의 c를 일렬로 배열하는 순열이므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{10!}{3!3!2!1!1!}=\mathbf{50400}(\text{가지})$$

2 10명의 학생을 일렬로 세우고, 그들이 받는 입장권을 표시하여 보자.

예를 들어 1~5번은 A 공연 입장권을, 6~7번은 B 공연 입장권을, 8~10번은 C 공연 입장권을 받는다고 하면

AAAAABBCCC

이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 5개의 A, 2개의 B, 3개의 C를 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{10!}{5!2!3!}=\mathbf{2520}(\text{가지})$$

3 (1) (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6(\text{가지})$$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!2!}=10(\text{가지})$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times10=\mathbf{60}$(가지)

(2) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5!4!}=126(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는 위의 126가지에서 (1)의 경우의 수를 빼면 되므로

$126-60=\mathbf{66}$(가지)


83

2 중복조합

학습 목표
- 중복조합의 뜻을 안다.
- 중복조합의 수를 구할 수 있다.

1 순열, 조합과 이항정리

다 가 서 기 / 태극기 속의 수학

태극기의 괘(卦)는 양을 나타내는 ⚊와 음을 나타내는 ⚋를 중복 사용하여 나타낸 것이다. ⚊와 ⚋ 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 방법은 다음과 같이 4가지가 있다.

{⚊, ⚊, ⚊}, {⚊, ⚊, ⚋},
{⚊, ⚋, ⚋}, {⚋, ⚋, ⚋}

그리고 이들을 순서를 생각하여 세로로 배열하면 8가지의 괘가 나오는데, 그중에서 태극기에 있는 괘는 다음의 4가지이다.

☰, ☲, ☵, ☷

로 나타낼 때 두 개의 효(⚊, ⚋)를 사용하였다. 이것은 서양에서 발전한 이진법 또는 모스 부호와도 매우 비슷하다.

두 개의 ⚊, ⚋ 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 것은 다음과 같이 4가지가 있다.

{⚊, ⚊, ⚊}, {⚊, ⚊, ⚋},
{⚊, ⚋, ⚋}, {⚋, ⚋, ⚋}

이들을 순서를 생각하여 세로로 배열하면 다음과 같은 8가지의 괘(卦)가 나온다. 이것을 8괘(八卦)라고 한다.

☰	☶	☵	☳
건(乾)	간(艮)	감(坎)	진(震)
☴	☲	☱	☷
손(巽)	이(離)	태(兌)	곤(坤)

태극기에 있는 4개의 괘는 각각 건(乾), 곤(坤), 감(坎), 이(離)로서 이들은 각각 하늘, 땅, 물, 불을 상징한다.

또 이들 8개의 괘를 상하로 두 개씩 배열하면 64괘(64卦)가 나온다.

소단원의 학습 목표

1. 중복조합의 뜻을 안다.
2. 중복조합의 수를 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

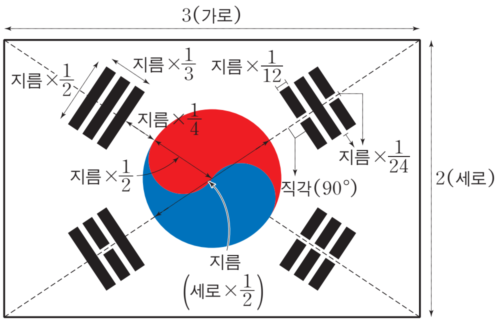
중복조합, ${}_nH_r$

다가서기 / 해설

동양에서는 예로부터 하늘과 땅, 해와 달, 양지와 음지 등을 양(陽)과 음(陰)으로 생각하고, 그것을 기호

참고 | 태극기의 규격

태극의 지름의 길이를 기준 1로 놓으면 각 부분의 크기는 다음과 같다.



탐구하기 / 풀이

1. 빨간색 컵 2개를 고르는 경우, 파란색 컵 2개를 고르는 경우, 노란색 컵 2개를 고르는 경우의 **3**가지 경우가 있다.
2. 빨간색 컵과 파란색 컵을 고르는 경우, 파란색 컵과 노란색 컵을 고르는 경우, 노란색 컵과 빨간색 컵을 고르는 경우의 **3**가지 경우가 있다.

알아보기 / 해설

4장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 중복을 허용하여 2장을 택하는 조합을 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

첫 번째	두 번째	결과
1	1	{1, 1}
	2	{1, 2}
	3	{1, 3}
	4	{1, 4}
2	1	~~{2, 1}~~
	2	{2, 2}
	3	{2, 3}
	4	{2, 4}
3	1	~~{3, 1}~~
	2	~~{3, 2}~~
	3	{3, 3}
	4	{3, 4}
4	1	~~{4, 1}~~
	2	~~{4, 2}~~
	3	~~{4, 3}~~
	4	{4, 4}

84

01 중복조합의 뜻

탐 구 하 기 / 컵 고르기

희주는 친구의 생일에 선물할 컵 2개를 고르려고 한다. 선물 가게에는 노란색, 파란색, 빨간색 세 종류의 컵이 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 컵 2개를 같은 색으로 고르는 경우의 수를 구하여라.
2. 컵 2개를 서로 다른 색으로 고르는 경우의 수를 구하여라.

알 아 보 기 / 중복조합의 뜻을 알아보자.

$_{n}C_{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0<r\le n$)

4장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 서로 다른 카드 2장을 택하는 조합은 다음과 같다. 이때, 조합의 수는 $_{4}C_{2}=6$이다.

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4},
{2, 3}, {2, 4}, {3, 4},

한편 4장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 중복을 허용하여 2장을 택하는 조합을 생각하면 다음과 같다.

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4},
~~{2, 1}~~, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4},
~~{3, 1}~~, ~~{3, 2}~~, {3, 3}, {3, 4},
~~{4, 1}~~, ~~{4, 2}~~, ~~{4, 3}~~, {4, 4}

이와 같이 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라 하고, 그 수를 기호로

$$_{n}H_{r}$$

와 같이 나타낸다.

$_{n}H_{r}$에서 H는 동차를 나타내는 Homogeneous의 첫 글자이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽 | 익힘책 68쪽

1 3장의 카드 1, 2, 3 에서 2장을 택하는 중복조합을 만들어 보아라.

스스로 하기 / 풀이

1 3장의 카드 1, 2, 3 에서 중복을 허용하여 2장을 택하는 조합을 생각하면 다음과 같다.

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3},
~~{2, 1}~~, {2, 2}, {2, 3},
~~{3, 1}~~, ~~{3, 2}~~, {3, 3},

위의 그림에서

{2, 1}, {3, 1}, {3, 2}

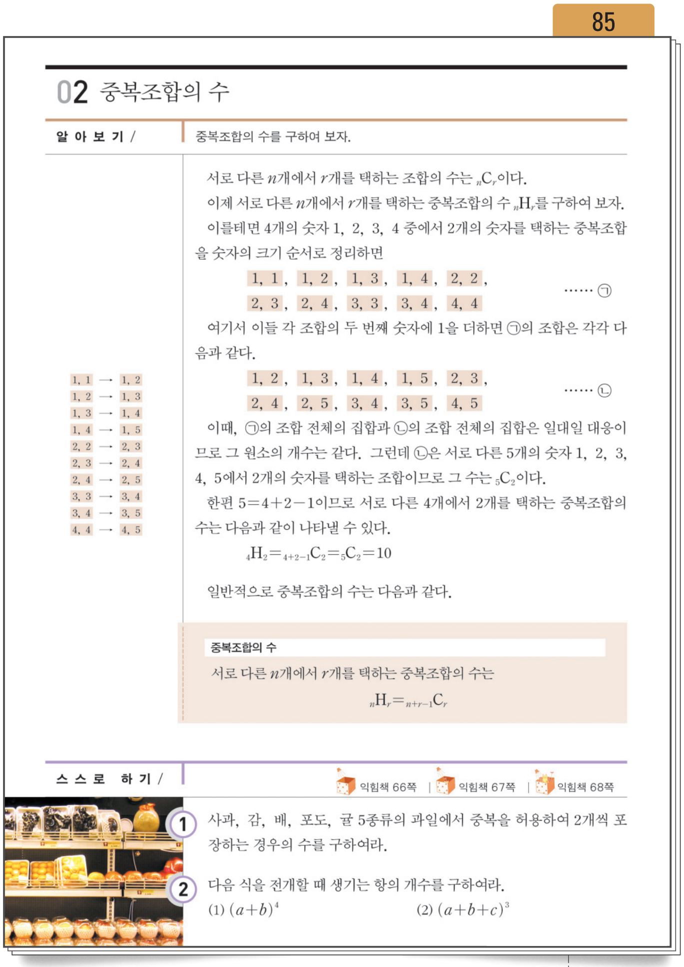
는 각각

{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}

과 같으므로 제외한다.

따라서 구하는 중복조합은 다음과 같다.

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3},
{2, 2}, {2, 3}, {3, 3}



85

02 중복조합의 수

알 아 보 기 / 중복조합의 수를 구하여 보자.

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$이다.

이제 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_nH_r$를 구하여 보자.

이를테면 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 2개의 숫자를 택하는 중복조합을 숫자의 크기 순서로 정리하면

1, 1 , 1, 2 , 1, 3 , 1, 4 , 2, 2 ,
2, 3 , 2, 4 , 3, 3 , 3, 4 , 4, 4 ...... ㉠

여기서 이들 각 조합의 두 번째 숫자에 1을 더하면 ㉠의 조합은 각각 다음과 같다.

1, 2 , 1, 3 , 1, 4 , 1, 5 , 2, 3 ,
2, 4 , 2, 5 , 3, 4 , 3, 5 , 4, 5 ...... ㉡

1, 1 → 1, 2
1, 2 → 1, 3
1, 3 → 1, 4
1, 4 → 1, 5
2, 2 → 2, 3
2, 3 → 2, 4
2, 4 → 2, 5
3, 3 → 3, 4
3, 4 → 3, 5
4, 4 → 4, 5

이때, ㉠의 조합 전체의 집합과 ㉡의 조합 전체의 집합은 일대일 대응이므로 그 원소의 개수는 같다. 그런데 ㉡은 서로 다른 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 2개의 숫자를 택하는 조합이므로 그 수는 ${}_5C_2$이다.

한편 $5=4+2-1$이므로 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$$

일반적으로 중복조합의 수는 다음과 같다.

중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 66쪽 | 익힘책 67쪽 | 익힘책 68쪽

1 사과, 감, 배, 포도, 귤 5종류의 과일에서 중복을 허용하여 2개씩 포장하는 경우의 수를 구하여라.

2 다음 식을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.
(1) $(a+b)^4$ (2) $(a+b+c)^3$

스스로 하기 / 풀이

1 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=\mathbf{15}\text{(가지)}$$

2 (1) 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=\mathbf{5}\text{(개)}$$

(2) 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\mathbf{10}\text{(개)}$$

참고 | 순열, 조합의 문제 풀이 오류 유형

순열, 조합과 관련된 문제에 대한 이해 과정에서 오류를 범하는 경우가 많이 있다.

1. 순서에 관한 오류

순서를 고려하지 않아야 할 경우에 고려하거나 반대로 순서를 반드시 고려해야 할 경우에 고려하지 않은 경우이다.

문제 : 서로 다른 우표 4장을 A, B 두 사람에게 2장씩 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

오답 : 서로 다른 우표 4장을 각각 a, b, c, d라 하고 A, B 두 사람에게 2장씩 나누어 주는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

A	a, b	a, c	a, d
B	c, d	b, d	b, c
A	b, c	b, d	c, d
B	a, d	a, c	a, b

A가 먼저 받고, B가 나중에 받는 경우와 B가 먼저 받고 A가 나중에 받는 경우를 모두 고려하면 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$(가지)

➡ A, B 두 사람이 우표를 받는 순서는 문제와 관련이 없으므로 2를 곱해서는 안 된다.

정답 : 구하는 경우의 수는 오답의 표의 경우의 수인 6가지이다.

2. 중복에 관한 오류

중복가능성을 고려하지 않거나 어떤 것이 중복이 가능한지 잘못 고려하는 경우이다.

문제 : 서로 다른 자동차 4대를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

오답 : 각 사람에게 최대 4대까지 줄 수 있으므로 구하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3=4\times4\times4=64$(가지)

➡ 중복할 수 있는 것은 '사람'이 아니라 '자동차'이다.

정답 : 각 자동차마다 세 사람을 선택할 수 있으므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$(가지)

참고 | 순열과 조합의 역사

순열과 조합에 대한 사람들의 관심은 옛날부터 지속되어 왔다. 6세기경 인도의 브라마굽타(Brahmagupta ; 598~670)는 n개의 원소를 갖는 집합의 원소를 재배열하는 순열의 수가

$$n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$$

로 주어진다는 사실을 알았다. 그 후 바스카라(Bhaskara, A. ; 1114~1185)는 n개의 원소를 갖는 집합에서 k개의 원소를 갖는 부분집합을 만들 때, 그 경우의 수가

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots2\cdot1}$$

이라는 사실을 알았고, 또한 순열의 개념을 여러 분야에서 발견하려고 노력하였다. 예를 들면 예술에서 다양한 표현 방법을 찾고, 건축에서 틈새의 변화의 수를 계산하고, 음악과 의학에서까지 순열의 개념을 발견하였다.

한편 로마 시대의 수학자 보이티우스(Boethius, A. M. S. ; ?480~524)는 n개의 사건들 중에서 2개를 조합하는 경우의 수가 $\frac{n(n-1)}{2}$이 된다는 것을 언급하였다.

거슨(Gerson, L. B.)은 1321년 저술한 'Maasei Choscheb'에서 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수와 조합의 수를 설명하고 있다.

순열과 조합에 대하여 체계적으로 연구한 흔적은 1494년 파촐리(Pacioli, L. ; 1445~1517)가 지은 'Summa de Arithmetica'에서 찾을 수 있다. 여기서 그는 몇 명의 사람들이 탁자에 앉는 경우의 수를 구하는 방법을 설명하고 있다.

'순열(Permutation)'이라는 용어는 베르누이(Bernoulli, J. ; 1654~1705)가 그의 저서 'Ars Conjectandi'에서 처음으로 사용하였다.

86

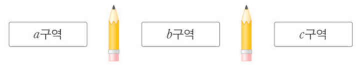
수 학 실 험 실

지우개와 연필의 배열로 알아보는 중복조합의 수

탐구 과제 세 개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 다섯 개를 뽑는 경우를 생각하여 보자.

예를 들어 a를 2개, b를 2개, c를 1개 뽑았다면 a, a, b, b, c이다.
또 a를 0개, b를 4개, c를 1개 뽑았다면 b, b, b, b, c이다.
그리고 a를 5개 뽑고 b와 c는 하나도 뽑지 않았다면 a, a, a, a, a이다.

여기에서 각 경우에 있는 a, b, c를 구별하기 위하여 다음과 같이 연필로 구역을 만들어 보자.



이제 각 구역에 a, b, c의 개수만큼 지우개를 늘어놓아 보자.

a, a, b, b, c인 경우

b, b, b, b, c인 경우

a, a, a, a, a인 경우

이러한 배열에서 다음을 알 수 있다.
(i) 연필의 개수는 문자의 종류 수보다 1만큼 작다.
(ii) 지우개의 개수는 중복을 허용하여 뽑는 문자의 개수와 같다.
(iii) 구하는 경우의 수는 연필 2개와 지우개 5개를 늘어놓을 때 지우개가 위치하는 곳을 찾는 조합의 수 ${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5$이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합의 수는 다음과 같이 구한다.

❶ $(n-1)$개의 연필로 n개의 구역을 만든다.
❷ r개의 지우개를 n개의 구역에 배열한다.
❸ 구하는 경우의 수는 $(n+r-1)$개에서 r개를 택하는 조합의 수인 ${}_{n+r-1}C_r$이다.

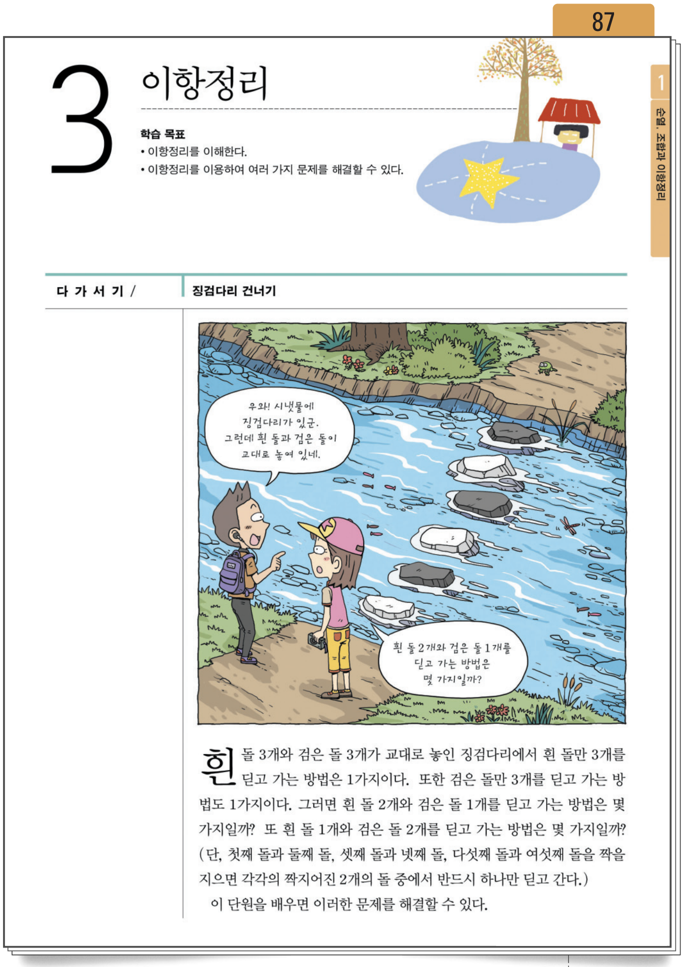
Plus 문제

4명의 학생들에게 같은 종류의 음료수 10개를 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

| 풀이 |

구하는 경우의 수는 서로 다른 10개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}$$
$$={}_{13}C_{10}$$
$$={}_{13}C_3$$
$$=286(\text{가지})$$



87

1 순열, 조합과 이항정리

3 이항정리

학습 목표

- 이항정리를 이해한다.
- 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

다 가 서 기 / **징검다리 건너기**

흰 돌 3개와 검은 돌 3개가 교대로 놓인 징검다리에서 흰 돌만 3개를 딛고 가는 방법은 1가지이다. 또한 검은 돌만 3개를 딛고 가는 방법도 1가지이다. 그러면 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 방법은 몇 가지일까? 또 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 방법은 몇 가지일까? (단, 첫째 돌과 둘째 돌, 셋째 돌과 넷째 돌, 다섯째 돌과 여섯째 돌을 짝을 지으면 각각의 짝지어진 2개의 돌 중에서 반드시 하나만 딛고 간다.)

이 단원을 배우면 이러한 문제를 해결할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 이항정리의 뜻을 안다.
2. 이항정리의 성질을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
3. 파스칼의 삼각형을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형

다가서기 / 해설

다음 그림과 같이 흰 돌 3개와 검은 돌 3개를 교대로 배열하고 첫째 돌과 둘째 돌, 셋째 돌과 넷째 돌, 다섯째 돌과 여섯째 돌을 각각 짝을 짓는다. 그리고 짝지어진 돌 중 하나만 딛는다고 하자.

○● ○● ○●

여기서 흰 돌만 3개를 딛고 가는 방법과 검은 돌만 3개를 딛고 가는 방법은 각각 다음과 같다.

○● ○● ○●

흰 돌 3개: ○ ○ ○

검은 돌 3개: ● ● ●

즉, 흰 돌만 3개를 딛고 가는 방법은 1가지이고, 검은 돌만 3개를 딛고 가는 방법도 1가지이다.

한편 각각의 짝지어진 돌 2개 중에서 반드시 하나만 딛고 가야 하므로 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 방법은 다음과 같다.

○● ○● ○●

○ ○ ●

○ ● ○

● ○ ○

즉, 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 방법은 3가지이다. 또 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 방법은 다음과 같다.

○● ○● ○●

○ ● ●

● ○ ●

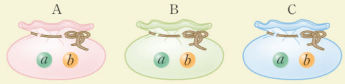
● ● ○

즉, 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 방법은 3가지이다.

01 이항정리의 뜻

탐 구 하 기 / 다항식의 전개

아래 그림의 세 주머니 A, B, C에서 a, b 중 하나를 각각 꺼내어 곱하여 보자. 예를 들어 세 주머니 A, B, C에서 각각 a, b, a를 꺼내면 그 곱은 $aba=a^2b$가 된다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 주머니에서 a를 2개, b를 1개 꺼내는 경우의 수를 구하여라.
2. 곱이 a^2b가 되는 경우의 수를 ${}_nC_r$의 꼴로 나타내어라.
3. 곱이 a^3, ab^2, b^3이 되는 경우의 수를 각각 ${}_nC_r$의 꼴로 나타내어라.

알 아 보 기 / 이항정리의 뜻을 알아보자.

$(a+b)^n$의 각 항의 계수는 조합을 이용하여 구할 수 있다.

이를테면 다항식 $(a+b)^4$의 전개식을 구하여 보자.
$(a+b)^4$을 전개하면 a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4의 항이 생긴다.
여기서 a^3b의 계수는 오른쪽 그림과 같이 4개의 인수 중에서 a를 3개, b를 1개 택하는 조합의 수 ${}_4C_1$과 같다.

$$\begin{array}{cccccl} (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ a & a & a & b & : a^3b & \multirow{4}{*}{$\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}{}_4C_1$} \\ a & a & b & a & : a^3b & \\ a & b & a & a & : a^3b & \\ b & a & a & a & : a^3b & \end{array}$$

같은 방법으로 a^4, a^2b^2, ab^3, b^4의 계수를 각각 구하면 다음과 같다.

$${}_4C_0,\ {}_4C_2,\ {}_4C_3,\ {}_4C_4$$

따라서 $(a+b)^4$의 전개식은 다음과 같다.

$$(a+b)^4={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+{}_4C_4b^4$$

탐구하기 / 풀이

1. 세 주머니 A, B, C에서 a를 2개, b를 1개 꺼내는 경우는 다음과 같이 3가지가 있다.

A	B	C
a	a	b
a	b	a
b	a	a

2. a^2b가 되려면 a를 2개, b를 1개 꺼내야 한다.
   이것은 세 주머니 A, B, C에서 a를 꺼낼 2개의 주머니를 택하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_3C_2$가지이다. 또는 세 주머니 A, B, C에서 b를 꺼낼 1개의 주머니를 택하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_3C_1$가지이다.
3. a^3은 세 주머니 A, B, C에서 모두 a를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3C_3$가지이다. 또는 세 주머니 A, B, C에서 b를 하나도 꺼내지 않아야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3C_0$가지이다.
   ab^2은 a를 1개, b를 2개 꺼내야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3C_1$ (또는 ${}_3C_2$)가지이다.
   b^3은 세 주머니 A, B, C에서 모두 b를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3C_3$ (또는 ${}_3C_0$)가지이다.

알아보기 / 해설

· a^4의 계수

$$\begin{array}{cccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ a & a & a & a & : & {}_4C_0 \end{array}$$

즉, 4개의 인수 중에서 a를 4개, b를 0개 택하는 조합의 수이므로 ${}_4C_0$

· a^2b^2의 계수

$$\left.\begin{array}{cccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ b & a & b & a \\ b & b & a & a \end{array}\right\}{}_4C_2$$

즉, 4개의 인수 중에서 a를 2개, b를 2개 택하는 조합의 수이므로 ${}_4C_2$

89

일반적으로

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$은 우변의 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서는 b를 택하고, $(n-r)$개의 인수에서는 a를 택하여 곱한 것이다. 이와 같은 경우의 수는 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같다.

따라서 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

이처럼 두 개의 항으로 이루어진 $(a+b)$의 거듭제곱, 즉 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 **이항정리**라고 한다.

이항정리

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$과 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

또 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 **이항계수**라 하고, $(r+1)$번째 항 ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

함 께 하 기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 이항정리를 이용하여 $(2a+3b)^3$을 전개하여라.

풀이

$(2a+3b)^3={}_3\mathrm{C}_0(2a)^3+{}_3\mathrm{C}_1(2a)^2\cdot3b+{}_3\mathrm{C}_2\cdot2a(3b)^2+{}_3\mathrm{C}_3(3b)^3$

$=1\times8a^3+3\times4a^2\times3b+3\times2a\times9b^2+1\times27b^3$

$=\mathbf{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^5$ (2) $(2a+b)^4$

(3) $(a-b)^6$ (4) $(2a-3b)^4$

함께하기 / 해설

1 이항정리

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

에서 $n=3$, a 대신 $2a$, b 대신 $3b$를 대입하여 전개한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 이항정리에 $n=5$를 대입한다.

$(a+b)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0a^5+{}_5\mathrm{C}_1a^4b+{}_5\mathrm{C}_2a^3b^2+{}_5\mathrm{C}_3a^2b^3+{}_5\mathrm{C}_4ab^4+{}_5\mathrm{C}_5b^5$

$=\mathbf{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$

(2) 이항정리에 $n=4$, a 대신 $2a$를 대입한다.

$(2a+b)^4$

$={}_4\mathrm{C}_0(2a)^4+{}_4\mathrm{C}_1(2a)^3b+{}_4\mathrm{C}_2(2a)^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3\cdot2ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$

$=1\times16a^4+4\times8a^3\times b+6\times4a^2\times b^2+4\times2a\times b^3+1\times b^4$

$=\mathbf{16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4}$

(3) 이항정리에 $n=6$, b 대신 $-b$를 대입한다.

$(a-b)^6$

$={}_6\mathrm{C}_0a^6+{}_6\mathrm{C}_1a^5(-b)+{}_6\mathrm{C}_2a^4(-b)^2+{}_6\mathrm{C}_3a^3(-b)^3+{}_6\mathrm{C}_4a^2(-b)^4+{}_6\mathrm{C}_5a(-b)^5+{}_6\mathrm{C}_6(-b)^6$

$=\mathbf{a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6}$

(4) 이항정리에 $n=4$, a 대신 $2a$, b 대신 $-3b$를 대입한다.

$(2a-3b)^4$

$={}_4\mathrm{C}_0(2a)^4+{}_4\mathrm{C}_1(2a)^3(-3b)+{}_4\mathrm{C}_2(2a)^2(-3b)^2+{}_4\mathrm{C}_3\cdot2a(-3b)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-3b)^4$

$=\mathbf{16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4}$

스스로 하기 / 풀이

2 (1) ${}_4C_2=6$에서 $\boldsymbol{n=4,\ r=2}$

${}_6C_1=6$에서 $\boldsymbol{n=6,\ r=1}$

${}_6C_5=6$에서 $\boldsymbol{n=6,\ r=5}$

(2) ${}_9C_3$ ${}_9C_4$이므로

$${}_{10}C_4$$

${}_nC_r$ ${}_nC_{r+1}$에서

$${}_{10}C_4$$

${}_nC_r={}_9C_3$

$\therefore \boldsymbol{n=9,\ r=3}$

3 (1) $(x+y)^6$

$={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5y+{}_6C_2x^4y^2$
$+{}_6C_3x^3y^3+{}_6C_4x^2y^4$
$+{}_6C_5xy^5+{}_6C_6y^6$

$=\boldsymbol{x^6+6x^5y+15x^4y^2}$
$\boldsymbol{+20x^3y^3+15x^2y^4}$
$\boldsymbol{+6xy^5+y^6}$

(2) $(x-2y)^5$

$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4(-2y)$
$+{}_5C_2x^3(-2y)^2$
$+{}_5C_3x^2(-2y)^3+{}_5C_4x(-2y)^4$
$+{}_5C_5(-2y)^5$

$=1\times x^5+5\times x^4\times(-2y)$
$+10\times x^3\times 4y^2+10\times x^2\times(-8y^3)$
$+5\times x\times 16y^4+1\times(-32y^5)$

$=\boldsymbol{x^5-10x^4y+40x^3y^2-80x^2y^3}$
$\boldsymbol{+80xy^4-32y^5}$

보충 학습

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r\ (1\le r<n)$을 알아보자.

서로 다른 n개에서 특정한 하나를 A라고 하면 서로 다른 n개에서 r개를 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_r$이고, 그 각 경우는 A를 포함하는 경우와 A를 포함하지 않는 경우로 나눌 수 있다.

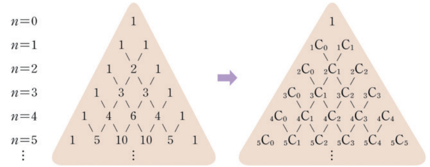
90

알 아 보 기 / 이항계수의 배열과 그 특징에 대하여 알아보자.

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식은 다음과 같다.

$(a+b)^0=1$
$(a+b)^1=1a+1b$
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$
$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$
$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$
$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$

이때, 각 항의 계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 나타낼 수 있다.



이와 같은 이항계수의 배열을 **파스칼의 삼각형**이라고 한다.

파스칼의 삼각형에서 이항계수의 배열이 좌우 대칭이므로

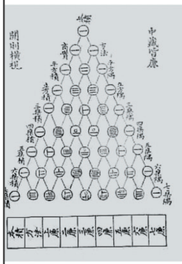
$${}_nC_r={}_nC_{n-r}$$

가 성립한다. 또 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 아래의 중앙에 있는 수와 같으므로

$${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$$

임을 알 수 있다.

${}_{n-1}C_{r-1}$ ${}_{n-1}C_r$ → ${}_nC_r$



주세걸(朱世傑)의 사원옥감(四元玉鑑)
중국 송나라 시대의 수학자 가헌(賈憲)이 언급한 '파스칼의 삼각형'이 실려 있다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

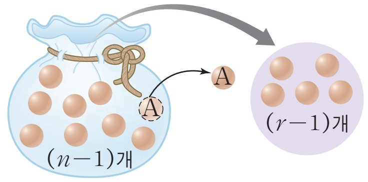
2 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음을 만족하는 n과 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_nC_r=6$　　(2) ${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{10}C_4$ (단, $r\le 4$)

3 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+y)^6$　　(2) $(x-2y)^5$

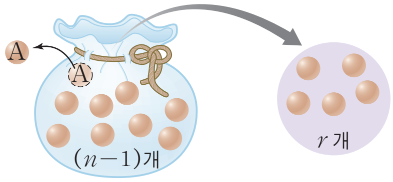
(i) **A를 포함하는 경우의 수**



A를 뽑은 다음 A를 제외한 $(n-1)$개에서 $(r-1)$개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_1C_1\times{}_{n-1}C_{r-1}={}_{n-1}C_{r-1}$(가지)

(ii) **A를 포함하지 않는 경우의 수**



91

02 이항정리의 성질

알아보기 / 이항정리의 성질에 대하여 알아보자.

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이다. 이때, 이 전개식을 이용하면 여러 가지 이항정리의 성질을 증명할 수 있다.

함께하기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

증명

이항정리에 의하여

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$$

$$\therefore {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

스스로 하기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 72쪽 | 익힘책 73쪽

1 다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7$

(2) ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}$

2 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(2) n이 홀수일 때

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

A를 제외한 $(n-1)$개에서 r개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_{n-1}C_r$(가지)

사건(i)과 사건(ii)는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$(가지)

알아보기 / 해설

이항정리

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_nb^n$$

에 a 대신 1, b 대신 x를 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

위의 식에서 x 대신 여러 가지 값을 대입하면 다양한 식의 값을 구할 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$에

(1) $n=7$을 대입하면

$${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7$$
$$=2^7=\mathbf{128}$$

(2) $n=10$을 대입하면

$${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}$$
$$=2^{10}=\mathbf{1024}$$

2 (1) 이항정리에 의하여

$$(1+x)^n$$
$$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$(1-1)^n$$
$$={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$$
$$\therefore {}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$$

(2) 함께하기 **1**에 의하여

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$ ……㉠

n이 홀수일 때, (1)에 의하여

${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}-{}_nC_n=0$ ……㉡

(i) ㉠+㉡을 하면

$$2({}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1})=2^n$$
$$\therefore {}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$$

(ii) ㉠−㉡을 하면

$$2({}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)=2^n$$
$$\therefore {}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$$

(i), (ii)에 의하여

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}$

$={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

모둠 학습

| 모둠 과제1 |

파스칼의 삼각형에서 다음을 알 수 있다.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

즉, $1+2+3+4+5=15$

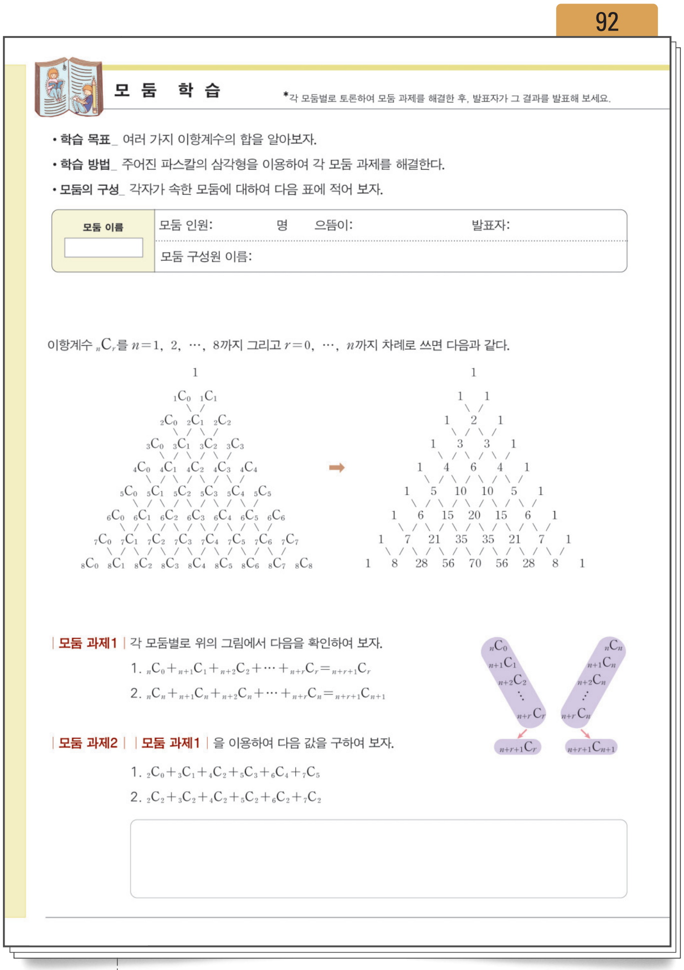
$1+3+6+10+15+21=56$

1. ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이므로

$${}_nC_0+{}_{n+1}C_1+{}_{n+2}C_2+\cdots+{}_{n+r}C_r$$
$$={}_{n+1}C_0+{}_{n+1}C_1+{}_{n+2}C_2+\cdots+{}_{n+r}C_r$$
$$={}_{n+2}C_1+{}_{n+2}C_2+{}_{n+3}C_3+\cdots+{}_{n+r}C_r$$
$$={}_{n+3}C_2+{}_{n+3}C_3+{}_{n+4}C_4+\cdots+{}_{n+r}C_r$$
$$={}_{n+4}C_3+{}_{n+4}C_4+{}_{n+5}C_5+\cdots+{}_{n+r}C_r$$
$$\vdots$$
$$={}_{n+r}C_{r-1}+{}_{n+r}C_r$$
$$={}_{n+r+1}C_r$$

2. ${}_nC_n+{}_nC_{n-1}={}_{n+1}C_n$이므로

$${}_nC_n+{}_{n+1}C_n+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{n+r}C_n$$
$$={}_{n+1}C_{n+1}+{}_{n+1}C_n+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{n+r}C_n$$
$$={}_{n+2}C_{n+1}+{}_{n+2}C_n+{}_{n+3}C_n+\cdots+{}_{n+r}C_n$$
$$={}_{n+3}C_{n+1}+{}_{n+3}C_n+{}_{n+4}C_n+\cdots+{}_{n+r}C_n$$
$$\vdots$$
$$={}_{n+r}C_{n+1}+{}_{n+r}C_n$$
$$={}_{n+r+1}C_{n+1}$$


92

모 둠 학 습

*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한 후, 발표자가 그 결과를 발표해 보세요.

- **학습 목표**_ 여러 가지 이항계수의 합을 알아보자.
- **학습 방법**_ 주어진 파스칼의 삼각형을 이용하여 각 모둠 과제를 해결한다.
- **모둠의 구성**_ 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

모둠 이름	모둠 인원: 명 으뜸이: 발표자:
	모둠 구성원 이름:

이항계수 ${}_nC_r$를 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$까지 그리고 $r=0,\ \cdots,\ n$까지 차례로 쓰면 다음과 같다.

1
${}_1C_0\ {}_1C_1$
${}_2C_0\ {}_2C_1\ {}_2C_2$
${}_3C_0\ {}_3C_1\ {}_3C_2\ {}_3C_3$
${}_4C_0\ {}_4C_1\ {}_4C_2\ {}_4C_3\ {}_4C_4$
${}_5C_0\ {}_5C_1\ {}_5C_2\ {}_5C_3\ {}_5C_4\ {}_5C_5$
${}_6C_0\ {}_6C_1\ {}_6C_2\ {}_6C_3\ {}_6C_4\ {}_6C_5\ {}_6C_6$
${}_7C_0\ {}_7C_1\ {}_7C_2\ {}_7C_3\ {}_7C_4\ {}_7C_5\ {}_7C_6\ {}_7C_7$
${}_8C_0\ {}_8C_1\ {}_8C_2\ {}_8C_3\ {}_8C_4\ {}_8C_5\ {}_8C_6\ {}_8C_7\ {}_8C_8$

➡

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

| 모둠 과제1 | 각 모둠별로 위의 그림에서 다음을 확인하여 보자.

1. ${}_nC_0+{}_{n+1}C_1+{}_{n+2}C_2+\cdots+{}_{n+r}C_r={}_{n+r+1}C_r$
2. ${}_nC_n+{}_{n+1}C_n+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{n+r}C_n={}_{n+r+1}C_{n+1}$

${}_nC_0$, ${}_{n+1}C_1$, ${}_{n+2}C_2$, $\vdots$, ${}_{n+r}C_r$ → ${}_{n+r+1}C_r$

${}_nC_n$, ${}_{n+1}C_n$, ${}_{n+2}C_n$, $\vdots$, ${}_{n+r}C_n$ → ${}_{n+r+1}C_{n+1}$

| 모둠 과제2 | | 모둠 과제1 | 을 이용하여 다음 값을 구하여 보자.

1. ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$
2. ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2$

| 모둠 과제2 |

1. ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$
$$={}_{7+1}C_5$$
$$={}_8C_5$$
$$=\mathbf{56}$$

2. ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2$
$$={}_{7+1}C_{2+1}$$
$$={}_8C_3$$
$$=\mathbf{56}$$

보충 학습

$${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$$

93

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
중복순열, 원순열, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\Pi_r$, ${}_nH_r$

Ⅱ_1. 순열, 조합과 이항정리

중복순열

문제 해결

1 여섯 명의 관광객이 A, B, C 세 종류의 관광 코스 중 하나씩을 택하는 경우의 수를 구하여라.

원순열

문제 해결

2 네 쌍의 부부가 원형의 식탁에 앉으려고 한다. 부부끼리 이웃하도록 앉는 경우의 수를 구하여라.

중복조합

이해

3 세 종류의 필기도구 연필, 색연필, 볼펜을 파는 문구점에서 5개의 필기도구를 사는 경우의 수를 구하여라.

중복조합의 활용

추론

4 $x+y+z=8$을 만족하는 x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

이항정리의 성질

계산

5 다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8$

(2) ${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}$

소위원회의 구성

의사소통

6 어떤 위원회의 전체 위원의 수는 11명이다. 이들 중 2명 이상 5명 이하로 구성된 소위원회를 만들려고 한다. 이때, 만들 수 있는 경우의 수를 구하여라.

중단원 확인하기 / 풀이

1 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열이므로

${}_3\Pi_6=3^6=\mathbf{729}$(가지)

2 부부를 묶어서 각각 한 사람으로 보면 모두 4명인 경우와 같고, 4명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=6$(가지)

6가지 각각에 대하여 부부가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는

$6\times2!\times2!\times2!\times2!=\mathbf{96}$(가지)

3 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5$

$={}_7C_2=\mathbf{21}$(가지)

4 예를 들어 $x+y+z=8$의 한 해

$x=3$, $y=4$, $z=1$

은 x를 3개, y를 4개, z를 1개 택한 것으로 생각하여 보자.

이때, 주어진 조건을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8$

$={}_{10}C_2=\mathbf{45}$(개)

5 (1) ${}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8$

$=2^{9-1}$

$=2^8=\mathbf{256}$

(2) ${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9$

$+{}_{11}C_{11}$

$=2^{11-1}$

$=2^{10}=\mathbf{1024}$

6 11명 중 n명으로 구성된 소위원회를 만드는 경우의 수는 서로 다른 11개에서 n개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{11}C_n$(가지)

따라서 11명 중 2명 이상 5명 이하로 구성된 소위원회를 만드는 경우의 수는

${}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$(가지)

이항정리의 성질에 의하여

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$

여기서 ${}_{11}C_6={}_{11}C_5$, ${}_{11}C_7={}_{11}C_4$, $\cdots$, ${}_{11}C_{11}={}_{11}C_0$ 이므로

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}$

$=2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)$

$=2^{11}$

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5=2^{10}$

$\therefore {}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$

$=2^{10}-{}_{11}C_0-{}_{11}C_1$

$=1024-1-11=\mathbf{1012}$(가지)

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.240

01 바탕

5명의 여행자가 3개의 호텔에 투숙하는 경우의 수를 구하여라.

02 바탕

다섯 사람이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.

서로 같은 것이 몇 개씩인지 확인한다.

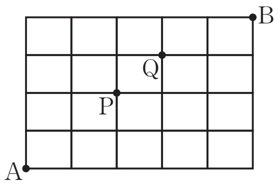
03 바탕

다음 단어를 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

(1) proof　　　　(2) parallel

04 기본

오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우 중 P 지점은 지나고, Q 지점은 지나지 않고 가는 경우의 수를 구하여라.



05 바탕

다음 식을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.

(1) $(x+y)^7$　　　　(2) $(x+y+z)^4$

06 기본

세 문자 x, y, z로 만들 수 있는 4차항의 개수는?

① 11개 ② 12개 ③ 13개 ④ 14개 ⑤ 15개

07 실력

12개의 과일을 담을 수 있는 바구니 한 개에 세 종류의 과일 사과, 감, 귤을 넣어 과일 바구니를 만들려고 한다. 바구니에 사과, 감, 귤을 각각을 적어도 한 개씩 넣는다고 할 때, 바구니에 12개의 과일을 채우는 경우의 수를 구하여라.

08 기본

이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2a+3b)^3$ (2) $(2x-3)^4$

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

09 기본

${}_{10}C_0+9{}_{10}C_1+9^2{}_{10}C_2+\cdots+9^{10}{}_{10}C_{10}$의 값에 있는 0의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

10 실력

집합 $A=\{x\,|\,x$는 20 이하의 음이 아닌 정수$\}$의 $\varnothing$이 아닌 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수를 구하여라.

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.241

01

10명의 유권자가 3명의 입후보자 중에서 어느 1명을 기명 투표하는 경우의 수는?

(단, 기권과 무효는 없다.)

① 1000가지 ② 1024가지
③ 10000가지 ④ 59049가지
⑤ 100000가지

02

minimum을 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 세 개의 m이 모두 이웃하는 것의 개수는?

① 20개 ② 60개 ③ 120개
④ 170개 ⑤ 340개

03

서로 다른 세 주머니에 100원 짜리 동전 10개를 나누어 넣는 경우의 수는?

① 57가지 ② 60가지 ③ 62가지
④ 66가지 ⑤ 70가지

04

어느 모임의 회장 선거에 3명이 등록하였다. 회원 100명이 각각 무기명으로 한 명을 투표할 때, 투표 결과의 경우의 수는? (단, 기권과 무효는 없다.)

① 3546가지 ② 3852가지 ③ 4388가지
④ 4950가지 ⑤ 5151가지

05

세 수 x, y, z가 음이 아닌 정수일 때, 방정식 $x+y+z=6$의 해의 개수는?

① 8개 ② 18개 ③ 28개
④ 38개 ⑤ 48개

06

다항식 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$의 전개식에서 상수항은?

① 84 ② 36 ③ 0
④ -36 ⑤ -84

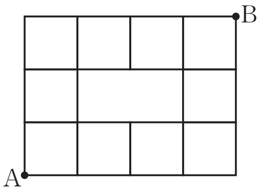
07

${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$의 값은?

① 256　② 511　③ 512
④ 1023　⑤ 1024

08

오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 25가지　② 26가지　③ 27가지
④ 28가지　⑤ 29가지

09

31^{31}을 900으로 나눈 나머지는?

① 31　② 32　③ 33
④ 34　⑤ 35

10

부모와 4명의 자녀로 구성된 식구가 원탁에 둘러 앉을 때, 부모가 마주 보도록 앉는 경우의 수는?

① 6가지　② 12가지　③ 24가지
④ 48가지　⑤ 120가지

11

다항식 $(x+1)^2(x+2)^5$의 전개식에서 x의 계수는?

① 100　② 111　③ 122
④ 133　⑤ 144

12

두 모스부호 $\cdot$, $-$를 나열하여 100개의 신호를 만들려고 할 때, 필요한 부호의 최소의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개
④ 6개　⑤ 7개

13

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $Y=\{11,\ 12,\ 13\}$으로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 다음 조건을 만족하는 함수 f의 개수는?

집합 X의 임의의 두 원소 $a,\ b$에 대하여 $a<b$이면 $f(a) \leq f(b)$

① 10개　② 11개　③ 12개
④ 13개　⑤ 14개

14

남자 4명과 여자 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 여자끼리는 이웃하지 않는 경우의 수는?

① 24가지　② 48가지　③ 144가지
④ 288가지　⑤ 576가지

15

다음 부등식을 만족하는 양의 정수 n의 값은?

$2000 < {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n < 3000$

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

16

$\left(2x^3+\dfrac{1}{3x^2}\right)^n$의 전개식이 상수항을 갖도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

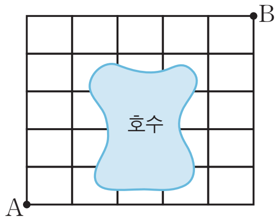
17

방정식 $x+y+z=10$을 만족하는 $x,\ y,\ z$의 양의 정수인 해의 개수는?

① 12개　② 16개　③ 20개
④ 28개　⑤ 36개

18

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 30가지　② 32가지　③ 34가지
④ 36가지　⑤ 38가지

19 UP!!

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,
$Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$의 총 개수는?

Ⅰ. $x_1 \in X$, $x_2 \in X$일 때, $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.
Ⅱ. $f(3)=4$

① 12개 ② 18개 ③ 24개
④ 36개 ⑤ 56개

20 UP!!

프로 야구의 플레이오프에서는 두 팀이 5회의 시합을 하여 먼저 3회를 이기는 팀이 우승 팀이 된다. 플레이오프에 A, B 두 팀이 진출했을 때, A 팀이 우승하게 되는 경우의 수는?

① 5가지 ② 10가지 ③ 15가지
④ 20가지 ⑤ 25가지

21 서술형

양의 부호 '+' 5개와 음의 부호 '−' 8개를 일렬로 배열할 때, 부호의 변화가 5번 생기는 경우의 수를 구하여라.

22 서술형

다항식 $(x^2+x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

Ⅱ 순열과 조합

중단원 평가 문제

▶ 1. 순열, 조합과 이항정리 / P_112

01 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$(가지)

답 243가지

02 $(5-1)!=4!=24$(가지)

답 24가지

03 (1) 2개의 o, 1개의 p, 1개의 r, 1개의 f를 일렬로 배열하는 순열이므로 구하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!1!1!1!}=60$(가지)

(2) 3개의 l, 2개의 a, 1개의 p, 1개의 r, 1개의 e를 일렬로 배열하는 순열이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{3!2!1!1!1!}=3360$(가지)

답 (1) 60가지 (2) 3360가지

04 (ⅰ) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지)

(ⅱ) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!2!}=10$(가지)

P 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{2!}{1!1!}\cdot\dfrac{3!}{2!1!}=6$(가지)

그러므로 P 지점에서 Q 지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $10-6=4$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times4=24$(가지)

답 24가지

05 (1) 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므로 구하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_7={}_{2+7-1}\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_1=8$(개)

(2) 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$(개)

답 (1) 8개 (2) 15개

06 세 문자 x, y, z로 만들 수 있는 사차항의 개수는 $(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 항의 개수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$(개)

답 ⑤

07 먼저 사과, 감, 귤을 한 개씩 바구니에 넣고, 9개의 과일을 넣으면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$(가지)

답 55가지

08 (1) $(2a+3b)^3$

$={}_3\mathrm{C}_0(2a)^3+{}_3\mathrm{C}_1(2a)^2\cdot3b+{}_3\mathrm{C}_2\cdot2a(3b)^2$
$\quad+{}_3\mathrm{C}_3(3b)^3$

$=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

(2) $(2x-3)^4$

$={}_4\mathrm{C}_0(2x)^4+{}_4\mathrm{C}_1(2x)^3(-3)$
$\quad+{}_4\mathrm{C}_2(2x)^2(-3)^2+{}_4\mathrm{C}_3\cdot2x(-3)^3$
$\quad+{}_4\mathrm{C}_4(-3)^4$

$=16x^4-96x^3+216x^2-216x+81$

답 (1) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$
(2) $16x^4-96x^3+216x^2-216x+81$

09 $(1+x)^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1x+{}_{10}\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}x^{10}$의 양변에 $x=9$를 대입하면

$(1+9)^{10}$

$={}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1\cdot9+{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot9^2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\cdot9^{10}$

$\therefore {}_{10}\mathrm{C}_0+9{}_{10}\mathrm{C}_1+9^2{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+9^{10}{}_{10}\mathrm{C}_{10}=10^{10}$

따라서 0의 개수는 10개이다.

답 ⑤

10 $A=\{0, 1, 2, \cdots, 20\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 21개이다.
그러므로 집합 A의 $\varnothing$이 아닌 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수는
${}_{21}C_2+{}_{21}C_4+{}_{21}C_6+\cdots+{}_{21}C_{20}$(개)
이때,
${}_{21}C_0+{}_{21}C_2+{}_{21}C_4+\cdots+{}_{21}C_{20}=2^{21-1}=2^{20}$
이므로
${}_{21}C_2+{}_{21}C_4+{}_{21}C_6+\cdots+{}_{21}C_{20}=2^{20}-1$
답 $(2^{20}-1)$개

대단원 평가 문제 p.114~117

01 기명 투표는 이름을 밝히는 것으로 중복순열로 생각할 수 있다.
선거에 출마한 3명 중에서 10번 뽑는 경우이다. 즉, 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복순열이므로 구하는 경우의 수는
${}_3\Pi_{10}=3^{10}=59049$(가지)
|다른 풀이|
10명의 유권자를 1, 2, 3, ⋯, 10이라 하고, 3명의 입후보자를 A, B, C라고 하면 모든 경우는 다음과 같다.

1	2	3	⋯	9	10
A	A	A	⋯	A	A
A	A	A	⋯	A	B
A	A	A	⋯	B	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C	C	C	⋯	C	C

따라서 구하는 경우의 수는
${}_3\Pi_{10}=3^{10}=59049$(가지)
답 ④

02 minimum의 7개의 문자에는 3개의 m, 2개의 i, 1개의 n, 1개의 u가 있다.
세 개의 문자 m이 모두 이웃하므로 세 개의 문자 m을 M으로 보면 1개의 M, 2개의 i, 1개의 n, 1개의 u를 일렬로 배열하는 순열이므로 구하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{1!2!1!1!}=60$(개)
답 ②

03 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수이므로 구하는 경우의 수는
${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$(가지)
답 ④

04 무기명 투표는 이름을 밝히지 않는 것으로 중복조합으로 생각할 수 있다.
선거에 출마한 3명 중에서 중복을 허용하여 100번 뽑는 경우이다. 즉, 서로 다른 3개에서 100개를 택하는 중복조합의 수이므로 구하는 경우의 수는
${}_3H_{100}={}_{3+100-1}C_{100}={}_{102}C_{100}$
$={}_{102}C_2=5151$(가지)
답 ⑤

05 x, y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$(개)
답 ③

06 $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^9$의 전개식의 일반항은
${}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_9C_r(-1)^r x^{18-3r}$
(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 9$)
상수항은 $18-3r=0$에서 $r=6$일 때이므로
${}_9C_6(-1)^6={}_9C_3=84$
답 ①

07 $(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$의 양변에 $x=1$과 $x=-1$을 각각 대입하면

$2^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}$ ……㉠

$0={}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}$ ……㉡

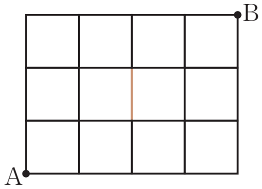
㉠+㉡을 하면

$2^{10}=2({}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_{10})$

$\therefore\ {}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^9=512$

답 ③

08 오른쪽 그림과 같이 가운데 도로를 하나 추가했을 때, A 지점에서 출발하여 B 지점까지 가는 최단 경로의 수는



$\dfrac{7!}{4!3!}=35$(가지)

A 지점을 출발하여 추가한 도로를 지나 B 지점까지 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{3!}{2!1!}\times1\times\dfrac{3!}{2!1!}=3\times1\times3=9$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$35-9=26$(가지)

답 ②

09 $31^{31}=(30+1)^{31}$

$={}_{31}C_0\cdot30^{31}+{}_{31}C_1\cdot30^{30}+{}_{31}C_2\cdot30^{29}+\cdots+{}_{31}C_{29}\cdot30^2+{}_{31}C_{30}\cdot30+{}_{31}C_{31}$

$=900({}_{31}C_0\cdot30^{29}+{}_{31}C_1\cdot30^{28}+{}_{31}C_2\cdot30^{27}+\cdots+{}_{31}C_{29})+{}_{31}C_{30}\cdot30+{}_{31}C_{31}$

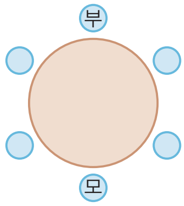
이므로 31^{31}을 900으로 나눈 나머지는 ${}_{31}C_{30}\cdot30+{}_{31}C_{31}$을 900으로 나눈 나머지와 같다.

${}_{31}C_{30}\cdot30+{}_{31}C_{31}=930+1=931$

이므로 구하는 나머지는 31이다.

답 ①

10 오른쪽 그림과 같이 원탁에 6자리를 만들고 아버지를 한 곳에 앉히면 어머님은 반대쪽에 앉혀야 한다.



이때, 4명의 자녀를 남는 자리에 앉히면 되므로 구하는 경우의 수는

$4!=24$(가지)

답 ③

11 (i) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

(ii) $(x+2)^5$의 전개식의 일반항이 ${}_5C_rx^r\cdot2^{5-r}$이므로

x의 항은 ${}_5C_1x\cdot2^4=80x$

상수항은 ${}_5C_02^5=32$

(i), (ii)에 의하여 $(x+1)^2(x+2)^5$의 전개식에서 x의 항은

$2x\times32+1\times80x=144x$

따라서 x의 계수는 144이다.

답 ⑤

12 ·, −에서 부호를 1개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2^1$(개)

부호를 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2$(개)

⋮

부호를 n개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_n=2^n$(개)

$2^1+2^2+\cdots+2^n\ge100$에서

$\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}\ge100$

$\therefore\ 2^n\ge51$

따라서 최소의 자연수 n은 6이므로 부호는 최소한 6개가 필요하다.

답 ④

13 주어진 조건은 x의 값이 커지면 y의 값은 크거나 같아져야 한다는 것을 의미하므로 11, 12, 13에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 크기 순서로 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는
$${}_{3}H_{3}={}_{3+3-1}C_{3}={}_{5}C_{3}$$
$$={}_{5}C_{2}=10(\text{개})$$
답 ①

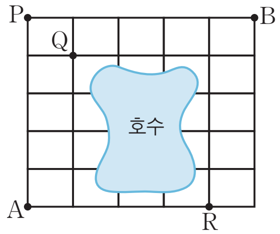
14 남자 4명을 원탁에 앉히는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$(가지)
남자들 사이의 4자리에 여자 3명을 앉히는 경우의 수는
${}_{4}P_{3}=24$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times24=144$(가지)
답 ③

15 ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$ 에서
$${}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}-{}_{n}C_{0}$$
$$=2^{n}-1$$
$\therefore 2000<2^{n}-1<3000$
즉, $2001<2^{n}<3001$
그런데 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 $n=11$이다.
답 ②

16 $\left(2x^{3}+\dfrac{1}{3x^{2}}\right)^{n}$의 전개식에서 일반항은
$${}_{n}C_{r}(2x^{3})^{r}\left(\frac{1}{3x^{2}}\right)^{n-r}={}_{n}C_{r}2^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-r}x^{5r-2n}$$
(단, $r=0$, 1, 2, $\cdots$, n)
$\left(2x^{3}+\dfrac{1}{3x^{2}}\right)^{n}$이 상수항을 가지려면 $5r-2n=0$인 자연수 n과 음이 아닌 정수 r가 존재해야 한다.
$\therefore n=\dfrac{5}{2}r$
따라서 $r=2$일 때, 최솟값 $n=5$를 가진다.
답 ①

17 $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$ (a, b, c는 음이 아닌 정수)이라고 하면 주어진 문제는 방정식 $a+b+c=7$을 만족하는 a, b, c의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하는 것과 같다.
이것은 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
${}_{3}H_{7}={}_{3+7-1}C_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$(개)
답 ⑤

18 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음 그림에서 A→P→B 또는 A→Q→B 또는 A→R→B이다.



A→P→B로 가는 경우의 수는
$1\times1=1$(가지)
A→Q→B로 가는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{1!4!}\times\dfrac{5!}{4!1!}=25$(가지)
A→R→B로 가는 경우의 수는
$1\times\dfrac{6!}{1!5!}=6$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$1+25+6=32$(가지)
답 ②

19 조건 Ⅱ에서 $f(3)=4$이고 조건 Ⅰ에서 x의 값이 크면 그 함숫값도 크므로 집합 $\{1, 2\}\in X$는 집합 $\{1, 2, 3\}\in Y$에 대응하고, 집합 $\{4, 5\}\in X$는 집합 $\{5, 6, 7, 8\}\in Y$에 대응해야 한다.
(i) 조건 Ⅰ을 만족하는 집합 $\{1, 2\}\in X$에서 집합 $\{1, 2, 3\}\in Y$로의 함수의 개수는
${}_{3}C_{2}=3$(개)

(ii) 조건 Ⅱ를 만족하는 집합 $\{4, 5\} \in X$에서 집합 $\{5, 6, 7, 8\} \in Y$로의 함수의 개수는

${}_4C_2=6$(개)

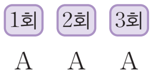
(i), (ii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$3\times 6=18$(개)

답 ②

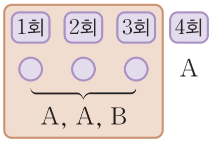
20 (i) 3회에 A 팀이 우승하는 경우

1, 2, 3회 모두 A 팀이 이기면 되므로 그 경우의 수는 1가지이다.



(ii) 4회에 A 팀이 우승하는 경우

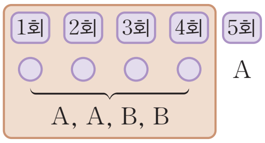
3회까지 A 팀이 2번, B 팀이 1번 이긴 후 4회에 A 팀이 이기면 되므로 그 경우의 수는



$\dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

(iii) 5회에 A 팀이 우승하는 경우

4회까지 A 팀이 2번, B 팀이 2번 이긴 후 5회에 A 팀이 이기면 되므로 그 경우의 수는



$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지)

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+3+6=10$(가지)

답 ②

21 1단계 '+'가 맨 앞에 오는 경우의 수를 구한다.

'+'가 맨 앞에 오는 경우는 다음과 같다.

'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역

이때, 각 구역에 적어도 1개의 부호는 들어가야 한다.

각 '+' 구역에 '+'를 1개씩 배열하고 남은 2개를 3곳에 배열하는 경우는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합이므로 그 경우의 수는

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2$

$={}_4C_2=6$(가지)

또 각 '−' 구역에 '−'를 1개씩 배열하고 남은 5개를 3곳에 배열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로 그 경우의 수는

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5$

$={}_7C_2=21$(가지)

따라서 '+'가 맨 앞에 오는 경우의 수는

$6\times 21=126$(가지) ……㉠

2단계 '−'가 맨 앞에 오는 경우의 수를 구한다.

'−'가 맨 앞에 오는 경우는 다음과 같다.

'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역

이 경우는 '+'가 맨 앞에 오는 경우의 수와 같으므로 '−'가 맨 앞에 오는 경우의 수도 126가지이다. ……㉡

3단계 부호의 변화가 5번 생기는 경우의 수를 구한다.

㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는

$126+126=252$(가지)

답 252가지

22 1단계 $\{x^2+(x+1)\}^5$의 전개식의 일반항을 구한다.

$\{x^2+(x+1)\}^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^2)^r(x+1)^{5-r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 5$)

2단계 $r=0$일 때, x^3의 항을 구한다.

$r=0$일 때, ${}_5C_0(x+1)^5$에서 x^3의 항은

${}_5C_0\cdot{}_5C_3x^3=10x^3$ ……㉠

3단계 $r=1$일 때, x^3의 항을 구한다.

$r=1$일 때, ${}_5C_1x^2(x+1)^4$에서 x^3의 항은

${}_5C_1x^2\cdot{}_4C_1x={}_5C_1\cdot{}_4C_1x^3=20x^3$ ……㉡

4단계 x^3의 계수를 구한다.

㉠, ㉡에 의하여 x^3의 계수는

$10+20=30$

답 30

III 확률

1 확률의 뜻과 활용　2 조건부확률

복잡하고 방대한 자료를 과학적으로 정리하고 분석하여 미래를 예측할 때, 경우의 수와 확률이 널리 사용된다. 예를 들어 기상청에서는 과거의 기록 및 구름 사진 등과 같은 기상 자료를 바탕으로 다가올 날씨를 예측한다. 또한 생명 과학에서 특정 유전자가 나타날 확률을 알면 생명체의 신비를 풀 수 있다.

단원의 흐름

이미 배운 내용

▶ **중학교 1학년**
- 상대도수

▶ **중학교 2학년**
- 경우의 수
- 확률의 뜻과 기본 성질
- 확률의 계산

이번에 배울 내용

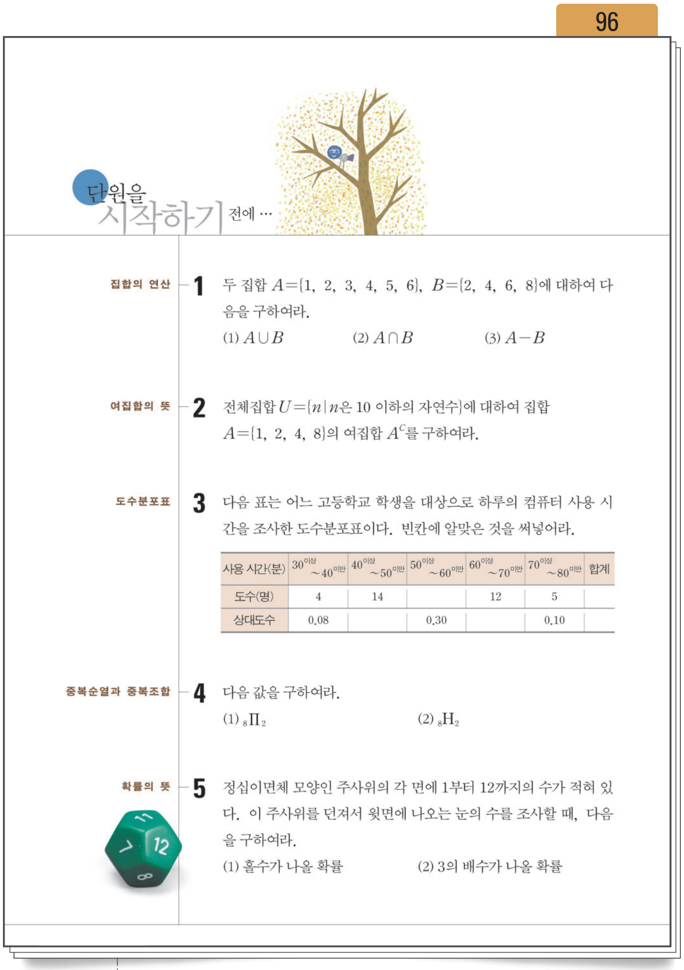
- 확률의 뜻과 기본 성질
- 확률의 계산과 활용
- 조건부확률
- 확률의 곱셈정리
- 독립과 종속

다음에 배울 내용

▶ **적분과 통계**
- 확률분포

이 단원의 학습 목표

1. 수학적 확률과 통계적 확률의 의미와 그 관계를 이해한다.
2. 확률의 기본 성질을 이해한다.
3. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
4. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
5. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
6. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
7. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.


96

단원을 시작하기 전에 …

집합의 연산

1 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $A\cup B$ (2) $A\cap B$ (3) $A-B$

여집합의 뜻

2 전체집합 $U=\{n\,|\,n$은 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 집합 $A=\{1, 2, 4, 8\}$의 여집합 A^C를 구하여라.

도수분포표

3 다음 표는 어느 고등학교 학생을 대상으로 하루의 컴퓨터 사용 시간을 조사한 도수분포표이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

사용 시간(분)	$30^{이상}\sim40^{미만}$	$40^{이상}\sim50^{미만}$	$50^{이상}\sim60^{미만}$	$60^{이상}\sim70^{미만}$	$70^{이상}\sim80^{미만}$	합계
도수(명)	4	14		12	5	
상대도수	0.08		0.30		0.10	

중복순열과 중복조합

4 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_8\Pi_2$ (2) ${}_8\mathrm{H}_2$

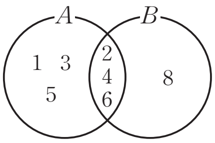
확률의 뜻

5 정십이면체 모양인 주사위의 각 면에 1부터 12까지의 수가 적혀 있다. 이 주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 홀수가 나올 확률 (2) 3의 배수가 나올 확률

단원을 시작하기 전에 ········· 풀이

1 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



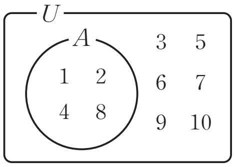
(1) $A\cup B=\{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}\}$

(2) $A\cap B=\{\mathbf{2, 4, 6}\}$

(3) $A-B=\{\mathbf{1, 3, 5}\}$

2 전체집합 U를 원소나열법으로 나타내면 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

두 집합 U, A를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A^C=\{\mathbf{3, 5, 6, 7, 9, 10}\}$

3 (각 계급의 상대도수)$=\dfrac{(\text{그 계급의 도수})}{(\text{도수의 총합})}$

사용 시간(분)	$30^{이상}\sim40^{미만}$	$40^{이상}\sim50^{미만}$	$50^{이상}\sim60^{미만}$	$60^{이상}\sim70^{미만}$	$70^{이상}\sim80^{미만}$	합계
도수(명)	4	14	**15**	12	5	**50**
상대도수	0.08	**0.28**	0.30	**0.24**	0.10	**1**

4 (1) ${}_8\Pi_2=8^2=\mathbf{64}$

(2) ${}_8\mathrm{H}_2={}_{8+2-1}\mathrm{C}_2={}_9\mathrm{C}_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=\mathbf{36}$

5 나올 수 있는 모든 경우의 수는 12가지이다.

(1) 홀수가 나오는 경우는 1, 3, 5, 7, 9, 11의 6가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{6}{12}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2) 3의 배수가 나오는 경우는 3, 6, 9, 12의 4가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{4}{12}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

1 확률의 뜻과 활용

이 단원을 배우면

- 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해하고 그 관계를 이해할 수 있다.
- 확률의 기본 성질을 이해할 수 있다.
- 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

1 확률의 뜻과 기본 성질

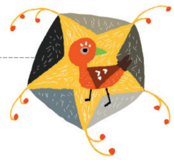
2 확률의 계산과 활용

98

1

확률의 뜻과 활용

1 확률의 뜻과 기본 성질



학습 목표

- 시행의 뜻을 이해한다.
- 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해한다.
- 수학적 확률과 통계적 확률의 관계를 이해한다.
- 확률의 기본 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / **상금의 배분**

확률론에 대한 연구는 프랑스의 드 메레(de Méré, C.)가 그의 친구이자 수학자인 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)에게 질문한 다음의 물음에서 유래하였다.

"실력이 같은 두 사람이 내기를 하여 먼저 3번을 이기는 사람이 상금을 다 가져가기로 하였다. 그런데 두 사람이 각각 2번과 1번을 이긴 상태에서 내기가 중단되었다. 상금을 어떻게 나누어야 할까?"

파스칼은 이 문제를 해결하기 위하여 페르마(Fermat, P. ; 1601~1665)와 편지를 주고받았고, 이러한 노력은 확률론의 기초 확립에 이바지하였다.

소단원의 학습 목표

1. 시행의 뜻을 이해한다.
2. 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해한다.
3. 수학적 확률과 통계적 확률의 관계를 이해한다.
4. 확률의 기본 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

시행, $\mathbf{P}(A)$, 수학적 확률, 통계적 확률

다가서기 / 해설

확률론은 지중해 연안에 있는 이탈리아에서 시작되어 프랑스에서 정립되었다. 그 이유는 르네상스로 인하여 지중해 연안의 항구 도시에서는 항해와 상업이 번창하였고, 이곳에 모인 사람들은 여가 시간에 주사위 또는 카드 놀이 등을 즐기는 때가 많았기 때문이다. 놀이에 대한 승률의 관심이 커지면서 확률론도 함께 발전하였던 것이다. 또한 이 시대의 계몽적 합리주의 정신은 우연적인 사건에 대해서 수학적으로 생각하는 풍조를 갖고 있었으므로 이러한 정신도 확률론을 발전시키는 원동력이 되었다.

이탈리아의 수도사인 파촐리(Pacioli, L. ; 1445~1517)는 그의 저서 '산술, 기하학, 비와 비례의 요약집(Summa de Arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita)' 에서 도박의 문제를 소개하여 확률의 시초로서 평가받고 있다. 그는 이 책에서 실력이 같은 두 경기자의 승부가 중단되었을 경우 상금을 어떻게 분배하는가에 대한 문제를 다루었다. 1654년 프랑스의 도박사인 드 메레가 파스칼에게 질문한 다가서기의 물음을 파스칼은 다음과 같이 해결하였다.

A가 2번, B가 1번을 이긴 상태에서 앞으로 일어날 수 있는 모든 경우는

A가 이기는 경우
B가 계속해서 2번 이기는 경우
B가 이긴 다음에 A가 이기는 경우

의 3가지뿐이다.

따라서 A와 B가 각각 32프랑씩 돈을 내어 먼저 3번 이기는 사람이 64프랑을 모두 갖기로 하였다면

$$(\text{A의 기대금액})=64\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=48(\text{프랑})$$

$$(\text{B의 기대금액})=64\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=16(\text{프랑})$$

이므로 A, B가 각각 48프랑, 16프랑씩 분배하는 것이 좋다.

99

01 시행의 뜻

탐 구 하 기 / 같은 조건에서 반복 가능한 실험이나 관찰

다음은 우리 생활 주변에서 찾을 수 있는 여러 가지 실험(또는 관찰)이다. 조건을 같게 하여 몇 번이고 반복할 수 있는 실험(또는 관찰)을 찾아보자.

ㄱ. 개구리를 해부하여 심장의 박동을 조사한다.
ㄴ. 윷을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모가 나오는 횟수를 조사한다.
ㄷ. 어떤 회사에서 생산된 형광등의 수명 시간을 조사한다.
ㄹ. 여러 곳의 밭에 품종별로 옥수수를 심고 그 수확량을 조사한다.

알 아 보 기 / 시행의 뜻을 알아보자.

주사위 또는 동전을 던지거나 제비를 뽑는 경우와 같이, 같은 조건에서 몇 번이고 반복할 수 있으며 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다. 또 표본공간 S의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

특별한 언급이 없는 한, '주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 관찰하는 시행'을 간단히 '주사위를 던지는 시행'이라고 한다.

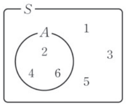
| 보기 | 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

이고, 이 시행의 근원사건은

$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$

이다. 또 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$이다.



스 스 로 하 기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S를 구하여라. 또 서로 다른 면이 나오는 사건 A를 구하여라.
(단, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낸다.)

탐구하기 / 풀이

ㄱ. 개구리마다 생체 조건이 다르므로 이 실험에서는 조건을 같게 할 수 없다.

ㄴ. 윷을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모가 나오는 횟수를 조사하는 것은 자연 현상이나 사회 현상의 영향을 받는 것이 아니므로 조건을 같게 하여 반복할 수 있다.

ㄷ. 한 회사에서 생산된 형광등의 수명 시간을 조사할 때, 전압, 온도 등의 조건을 같게 하여 반복할 수 있다.

ㄹ. 밭에 옥수수를 심을 때, 올해의 강우량, 일조량 등과 작년 또는 내년의 그것 등이 같다고 할 수 없으므로 이 실험에서는 조건을 같게 할 수 없다.

따라서 조건을 같게 하여 몇 번이고 반복할 수 있는 실험(또는 관찰)은 ㄴ, ㄷ이다.

알아보기 / 해설

• 주사위를 던지거나 동전을 던지는 경우에 각각의 시행에서 어떤 결과가 나올지 정확하게 알 수는 없다. 그러나 나올 수 있는 모든 결과의 집합은 알 수 있다. 이러한 집합을 표본공간(sample space)이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건(event)이라고 한다. 또 사건에 있는 원소의 개수를 경우의 수라고 한다.

• 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간 S는 윗면에 나오는 눈의 수의 전체의 집합으로 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이고, 사건은 S의 부분집합이다.
예를 들어 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$은 짝수의 눈이 나오는 사건이고, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$은 6의 약수의 눈이 나오는 사건이다.

또 $\{1\},\ \{2\},\ \cdots,\ \{6\}$과 같이 한 개의 원소로 된 사건을 근원사건(elementary event)이라고 한다.
한편 공집합 $\varnothing$도 사건으로 보고 이것을 공사건(null event)이라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

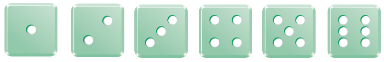
$S=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$

한편 서로 다른 면이 나오는 사건 A는

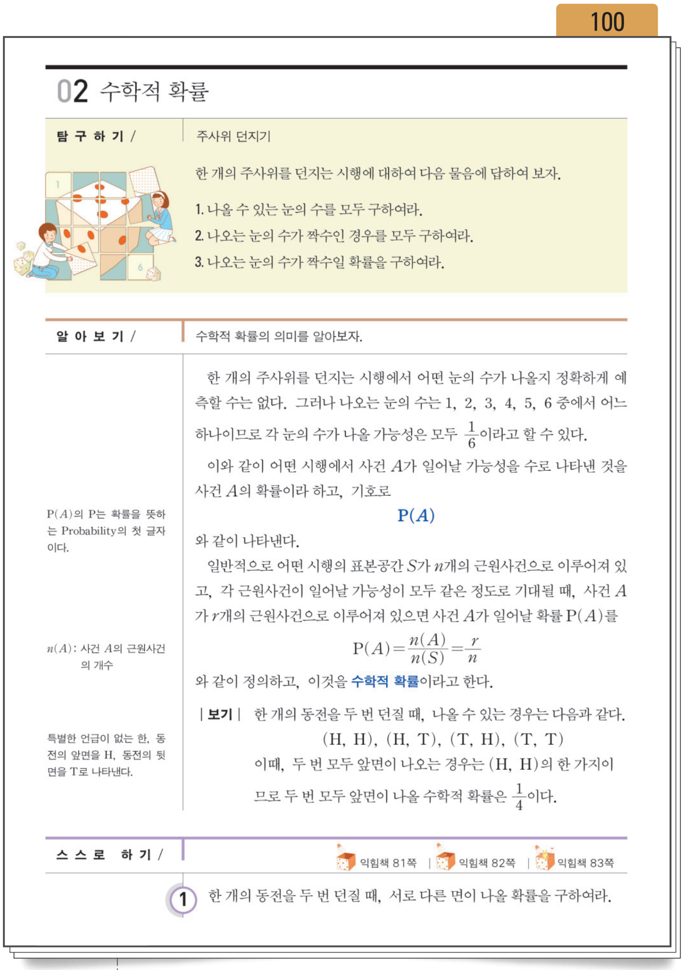
$A=\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$

탐구하기 / 풀이

한 개의 주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈을 관찰하면 다음과 같다.



1. 나올 수 있는 눈의 수는
   $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
2. 나오는 눈의 수가 짝수인 경우는
   $2,\ 4,\ 6$
3. 모든 경우의 수는 6가지이고, 눈의 수가 짝수인 경우의 수는 3가지이므로 구하는 확률은
   $\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$



02 수학적 확률

탐 구 하 기 / 주사위 던지기

한 개의 주사위를 던지는 시행에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나올 수 있는 눈의 수를 모두 구하여라.
2. 나오는 눈의 수가 짝수인 경우를 모두 구하여라.
3. 나오는 눈의 수가 짝수일 확률을 구하여라.

알 아 보 기 / 수학적 확률의 의미를 알아보자.

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 어떤 눈의 수가 나올지 정확하게 예측할 수는 없다. 그러나 나오는 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 어느 하나이므로 각 눈의 수가 나올 가능성은 모두 $\frac{1}{6}$이라고 할 수 있다.

이와 같이 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

P(A)의 P는 확률을 뜻하는 Probability의 첫 글자이다.

일반적으로 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 P(A)를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 **수학적 확률**이라고 한다.

$n(A)$: 사건 A의 근원사건의 개수

| **보기** | 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 나올 수 있는 경우는 다음과 같다.

(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)

이때, 두 번 모두 앞면이 나오는 경우는 (H, H)의 한 가지이므로 두 번 모두 앞면이 나올 수학적 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

특별한 언급이 없는 한, 동전의 앞면을 H, 동전의 뒷면을 T로 나타낸다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

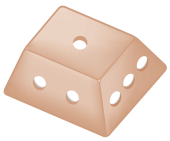
1 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 서로 다른 면이 나올 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

- 어떤 시행의 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

- 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때 수학적 확률을 이용할 수 있다.
  그런데 오른쪽 그림과 같이 정다면체 모양이 아닌 주사위에서는 1의 눈, 2의 눈, $\cdots$, 6의 눈이 나올 가능성이 같다고 볼 수 없다.
  따라서 수학적 확률을 이용할 수 없다.



- | **보기** | 에서 표본공간을
  {HH, HT, TH, TT}
  로 나타내어도 된다.

이때, 두 번 모두 앞면이 나오는 사건을 A라고 하면 $A=\{\mathrm{HH}\}$이므로 사건 A의 수학적 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

스스로 하기 / 풀이

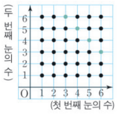
1 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 표본공간은 {HH, HT, TH, TT}이다. 또 서로 다른 면이 나오는 사건은 {HT, TH}이므로 구하는 확률은

$\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

101

함께하기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 9가 될 확률을 구하여라.



풀이

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$$

이므로 $n(S)=36$이다.

또 나오는 눈의 수의 합이 9인 사건을 A라고 하면

$$A=\{(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)\}$$

이므로 $n(A)=4$이다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

2 남학생 2명과 여학생 3명이 한 줄로 설 때, 남학생 2명이 이웃하게 설 확률을 구하여라.

풀이

전체 학생 5명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $5!$가지

남학생 2명을 묶어서 1명으로 생각하면, 전체 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $4!$가지이고, 이 각각에 대하여 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4!2!}{5!}=\dfrac{2}{5}$

스스로 하기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

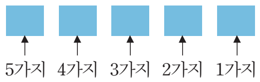
(1) 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률

(2) 나오는 눈의 수의 차가 2일 확률

3 파란색, 검은색, 빨간색 볼펜이 각각 3자루, 4자루, 3자루씩 있다. 여기서 임의로 볼펜 3자루를 뽑을 때, 빨간색 볼펜이 1자루 포함될 확률을 구하여라.

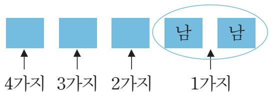
함께하기 / 해설

2 남학생 2명과 여학생 3명이 한 줄로 서는 전체 경우의 수는



$\therefore 5\times4\times3\times2\times1=5!$(가지)

남학생 2명을 하나로 묶어 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는



$\therefore 4\times3\times2\times1=4!$(가지)

그런데 ◯ 안의 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우가 $2!$가지 있으므로 남학생 2명이 이웃하는 경우의 수는 $4!\times2!$(가지)이다.

스스로 하기 / 풀이

2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

(1) (i) 두 눈의 수의 합이 3인 경우는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 6인 경우는

$(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$의 5가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 9인 경우는

$(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)$의 4가지

(iv) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는 $(6,\ 6)$의 1가지

(i)~(iv)에 의하여 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

(2) 두 눈의 수의 차가 2인 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),\ (3,\ 1),\ (4,\ 2),\ (5,\ 3),\ (6,\ 4)$

의 8가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

3 볼펜은 모두 10자루이고, 이 중에서 3자루를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)

빨간색 볼펜이 1자루 포함되는 경우는 빨간색 볼펜 3자루 중 1자루를 뽑고 나머지 7자루 중 2자루를 뽑는 것이므로 그 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2=3\times\dfrac{7\times6}{2\times1}=63$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{63}{120}=\dfrac{21}{40}$

03 통계적 확률

탐 구 하 기 / 동전 던지기에서 앞면이 나오는 상대도수

한 개의 동전을 다음 표에 나타난 횟수만큼 던져 보고, 앞면이 나온 횟수와 그 상대도수 및 상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차를 구하여 빈칸을 채워 보자.

던진 횟수(n)	10	20	30	40	50	60	80	100
앞면이 나온 횟수(r)								
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$								
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차								

알 아 보 기 / 통계적 확률의 의미를 알아보자.

수학적 확률은 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다는 가정 하에 정의하였지만, 자연 현상이나 사회 현상 중에는 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않는 경우도 흔히 있다.

이와 같은 경우는 시행을 여러 번 반복함으로써 어떤 사건이 일어나는 전체적인 경향을 알아볼 수 있다.

일반적으로 어떤 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자.

이때, n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 **통계적 확률**이라고 한다.

그러나 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수는 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

한편 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수를 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

통계적 확률을 경험적 확률이라고도 한다.

| 보기 | 어떤 윷을 1000번 던져서 모가 27번 나왔다면, 이 윷을 한 번 던질 때 모가 나올 통계적 확률은 $\frac{27}{1000}$로 본다.

탐구하기 / 풀이

답안 예시

던진 횟수(n)	10	20	30	40
앞면이 나온 횟수(r)	6	11	15	21
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.6	0.55	0.5	0.525
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.1	0.05	0	0.025
던진 횟수(n)	50	60	80	100
앞면이 나온 횟수(r)	24	30	44	54
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.48	0.5	0.55	0.54
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.02	0	0.05	0.04

앞의 표에서 시행 횟수 n이 점점 커지면 상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차는 점점 0에 가까워짐을 알 수 있다.

즉, 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수(통계적 확률)가 수학적 확률 $\frac{1}{2}$에 가까워짐을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

• 다음 표는 한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던져서 얻은 결과이다.

던진 횟수(n)	400	500	600	700	800	900	1000
앞면이 나온 횟수(r)	204	248	298	352	392	451	498
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.51	0.496	0.497	0.503	0.49	0.501	0.498
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.01	0.004	0.003	0.003	0.01	0.001	0.002

• 실제 생활에서 확률은 수학적 확률로 구할 수 없는 경우가 많다.

예를 들어 생산된 제품이 불량품일 확률, 버스가 연착할 확률, 내일 눈이 올 확률 등은 각 근원사건이 일어날 가능성이 같다고 볼 수 없으므로 수학적 확률을 구할 수 없는데 이런 경우에는 통계적 확률로 그 확률을 구해야 한다.

함께하기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 오른쪽 표는 우리나라에서 출생한 남녀 각각 10만 명당 나이에 따른 생존자 수를 조사하여 나타낸 것이다. 다음을 구하여라. (단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

(1) 40세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률

(2) 60세의 여자가 앞으로 20년간 생존할 확률

(단위: 명)

나이 \ 성별	남자	여자
0세	100000	100000
20세	99029	99247
40세	97352	98348
60세	87632	94748
80세	45216	68921

풀이

(1) 40세의 남자 97352명이 80세에는 45216명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{45216}{97352}=0.464\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.46}$$

(2) 60세의 여자 94748명이 80세에는 68921명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{68921}{94748}=0.727\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.73}$$

스스로 하기 /

익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 함께하기 **1**에 주어진 표에서 다음을 구하여라. (단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

(1) 20세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률

(2) 20세의 여자가 앞으로 60년간 생존할 확률

2 2007년 우리나라에서 신생아의 수는 496710명이었고, 그중 쌍둥이의 수는 13537명이었다. 신생아가 쌍둥이로 태어날 확률을 구하여라. (단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

생명표, 출산 현황 등의 관련 사이트 찾아보기

생명표, 출산 현황 등은 통계청 홈페이지나 국가통계포털(KOSIS)홈페이지에서 알아볼 수 있다.

- http://kostat.go.kr
- http://kosis.kr

함께하기 / 해설

1 생명표는 현재의 사망 수준이 그대로 유지된다는 가정하에 어떤 출생 집단이 연령별로 몇 세까지 살 수 있는가를 정리한 표이다.

생명표는 보건, 의료 정책 수립, 보험료율, 인명 피해 보상비 산정 등에 활용되고 있으며 장래의 인구 추계 작성, 국가 간 경제 · 사회 · 보건 수준 비교에 널리 이용되고 있다.

함께하기에 주어진 생명표는 우리나라의 2006년 생명표의 일부이다.

다음의 표는 통계청에서 2009년 12월 9일에 발표한 2008년 생명표의 일부이다. 2006년과 2008년의 생명표에서 우리나라의 평균 수명이 증가하였음을 알 수 있다.

나이 \ 성별	남자(명)	여자(명)
0	100000	100000
10	99418	99488
20	99156	99333
30	98505	98907
40	97447	98293
50	94627	97155
60	88429	94891
70	75675	89440
80	48442	71889
90	13252	30817
100^+	704	2810

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 20세의 남자 99029명이 앞으로 40년 후인 60세에는 87632명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{87632}{99029}=0.884\cdots$$
$$\fallingdotseq\mathbf{0.88}$$

(2) 20세의 여자 99247명이 앞으로 60년 후인 80세에는 68921명이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{68921}{99247}=0.694\cdots$$
$$\fallingdotseq\mathbf{0.69}$$

2 전체 496710명 중 쌍둥이가 13537명이므로 구하는 확률은

$$\frac{13537}{496710}=0.027\cdots$$
$$\fallingdotseq\mathbf{0.03}$$

04 확률의 기본 성질

탐구하기 / 자판기에서 음료수 뽑기

자판기에 700원, 1000원, 1500원짜리 세 종류의 음료수가 들어 있다. 각 종류의 음료수를 택하는 버튼의 개수가 같을 때, 다음을 구하여 보자.

1. 500원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
2. 1000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
3. 2000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률

알아보기 / 확률의 기본 성질을 알아보자.

확률에는 어떤 성질이 있는지 알아보자.
어떤 시행에서 임의의 사건 A는 표본공간 S의 부분집합이므로

$$0 \le n(A) \le n(S)$$

따라서 $0 \le \dfrac{n(A)}{n(S)} \le 1$이므로 확률의 정의에 의하여 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

이때, 반드시 일어나는 사건은 S가 되므로 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$

또 절대로 일어나지 않는 사건은 $\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=0$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 기본 성질

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$
(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$
(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

스스로 하기 / 익힘책 81쪽 | 익힘책 82쪽 | 익힘책 83쪽

1 어른 2명과 어린이 3명이 의자에 앉아 있다. 이 중에서 3명을 동시에 일어나게 할 때, 다음을 구하여라.
(1) 어린이가 3명 이하로 일어날 확률 (2) 어른 3명이 일어날 확률

탐구하기 / 풀이

음료수는 700원, 1000원, 1500원짜리만 있으므로

1. 500원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 나오는 음료수가 없다.
   따라서 구하는 확률은 $\dfrac{0}{3}=\mathbf{0}$
2. 1000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 700원 또는 1000원짜리 음료수가 나올 수 있다.
   따라서 구하는 확률은 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$
3. 2000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 700원 또는 1000원 또는 1500원짜리 음료수가 나올 수 있다.
   따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{3}=\mathbf{1}$

알아보기 / 해설

임의의 사건 A가 일어날 확률의 뜻을 이해하면 확률의 기본 성질을 쉽게 이해할 수 있다. 즉,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 }A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

이고, 이때 사건 A가 일어나는 경우의 수는 0 이상이고 일어날 수 있는 모든 경우의 수보다 작거나 같기 때문에 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$이다.

특히, $A=S$이면 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$이다.

이때, 표본공간의 확률이 1이라는 것은 표본공간의 모든 사건이 한꺼번에 일어난다는 것이 아니라 어떤 시행을 하면 표본공간 중의 한 사건이 반드시 일어난다는 뜻이다.

한편 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$의 원소의 개수는 0이므로

$$\mathrm{P}(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 어른이 2명뿐이므로 어린이 3명 중에서 적어도 1명은 반드시 일어난다.
따라서 어린이가 3명 이하로 일어나는 경우는 반드시 일어나는 사건이므로 구하는 확률은 **1**이다.
(2) 어른이 2명뿐이므로 어른이 3명 일어나는 경우는 절대로 일어나지 않는 사건이다.
따라서 구하는 확률은 **0**이다.

105

수 학
실 험 실

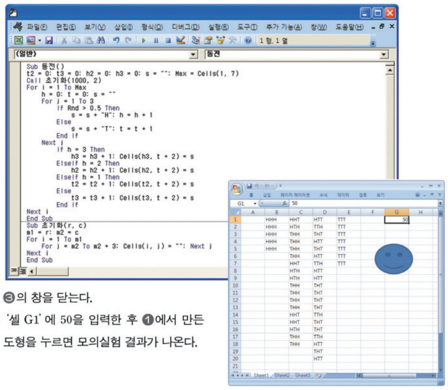
동전 던지기 모의실험

컴퓨터 프로그램을 이용하여 동전 3개를 동시에 50번 던지는 시행을 모의실험하여 보자.

❶ 메뉴 표시줄의 [삽입]–[도형]에서 도형 하나를 선택하고, 마우스를 클릭한 후 드래그하여 도형을 만든다.

❷ ❶에서 만든 도형 위에 커서를 놓고, 마우스의 오른쪽 버튼을 눌러 [매크로 지정]을 선택한다.

❸ 매크로 이름란에 '동전'을 입력하고, [새로 만들기]를 누르면 창이 뜬다. 여기에 다음 그림과 같이 입력한다.



❹ ❸의 창을 닫는다.

❺ '셀 G1'에 50을 입력한 후 ❶에서 만든 도형을 누르면 모의실험 결과가 나온다.

논술/수행 평가 과제

1. 모의실험 결과로부터 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 통계적 확률을 구하고, 수학적 확률과 통계적 확률의 차이를 구하여 보자.
2. 위의 프로그램을 이용하여 동전 3개를 100번, 200번, 500번 던지는 시행을 모의실험하여 앞면이 3개 나오는 사건, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 사건, 앞면이 1개, 뒷면이 2개 나오는 사건, 뒷면이 3개 나오는 사건의 4가지 사건이 일어날 통계적 확률을 각각 구하고, 수학적 확률과의 차이를 구하여 보자.

수학 실험실 / 해설

통계적 확률을 구할 때에 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수로 통계적 확률을 생각한다. '동전 던지기 모의실험'을 통하여 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면서 통계적 확률을 구하고, 그것을 수학적 확률과 비교할 수 있다.

논술/수행 평가 과제 / 해설

1. 위의 실험에서 시행 횟수 $n=50$이고, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 경우의 수는 18회이다.

따라서 구하는 통계적 확률은 $\frac{18}{50}=0.36$이다.

한편 동전 3개를 동시에 던졌을 때, 표본공간 S는

$S=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$

이때, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 사건은 $\{HHT,\ HTH,\ THH\}$이므로 구하는 수학적 확률은 $\frac{3}{8}=0.375$이다.

따라서 수학적 확률과 통계적 확률의 차이는 $0.375-0.36=0.015$이다.

2. 동전 3개를 동시에 던졌을 때,

앞면이 3개 나오는 사건의 수학적 확률은 $\frac{1}{8}=0.125$

앞면이 1개, 뒷면이 2개 나오는 사건의 수학적 확률은 $\frac{3}{8}=0.375$

뒷면이 3개 나오는 사건의 수학적 확률은 $\frac{1}{8}=0.125$

다음 예에서 n이 커질수록 통계적 확률과 수학적 확률의 차가 줄어든다는 것을 알 수 있다.

던진 횟수(n)		100	200	500
앞면 : 3	나온 횟수	10	20	51
	통계적 확률	0.1	0.1	0.102
수학적 확률과의 차		0.025	0.025	0.023
앞면 : 2 뒷면 : 1	나온 횟수	33	75	186
	통계적 확률	0.33	0.375	0.372
수학적 확률과의 차		0.045	0	0.003
앞면 : 1 뒷면 : 2	나온 횟수	41	77	200
	통계적 확률	0.41	0.385	0.4
수학적 확률과의 차		0.035	0.01	0.025
뒷면 : 3	나온 횟수	16	28	63
	통계적 확률	0.16	0.14	0.126
수학적 확률과의 차		0.035	0.015	0.001

소단원의 학습 목표

1. 배반사건의 뜻을 안다.
2. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3. 여사건의 뜻을 안다.
4. 여사건의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

배반사건, 여사건

106

1 확률의 뜻과 활용

2 확률의 계산과 활용

학습 목표

- 배반사건의 뜻을 알고, 확률의 덧셈정리를 이해한다.
- 여사건의 뜻을 알고, 여사건의 확률을 이해한다.

다 가 서 기 / **생일이 같은 사람이 있을 확률**

한 반의 학생의 수가 35명일 때, 생일이 같은 학생이 있을 확률을 구하여 보자.

1년을 366일로 생각하면 두 명의 학생이 있을 때, 두 학생의 생일이 다를 확률은 $\frac{365}{366}$이다.

세 명의 학생이 있을 때, 세 학생의 생일이 다를 확률은 세 번째 학생이 앞의 두 명과 생일이 달라야 하므로 $\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}$이다. 마찬가지 방법으로 하면 35명의 생일이 모두 다를 확률은 다음과 같다.

$$\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}\times\cdots\times\frac{332}{366}≒0.1865$$

따라서 이 반에서 생일이 같은 학생이 나올 확률은 다음과 같다.

$$1-\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}\times\cdots\times\frac{332}{366}≒0.8135$$

다가서기 / 해설

우연히 만난 두 명의 생일이 같을 확률은 $\frac{1}{366}≒0.0027$이다. 이것은 어떤 사람이 길을 걸어가면서 우연히 만난 1000명에게 생일을 물어볼 때, 2~3명이 나와 생일이 같을 수 있다는 것을 의미한다.

그러면 어느 가족 4명 중에서 생일이 같은 사람이 있을 확률은 어떻게 구할까?

이것은 두 명의 생일이 같을 확률, 세 명의 생일이 같을 확률, 네 명의 생일이 같을 확률을 구하여 더하면 된다. 그런데 이 방법은 계산이 복잡하므로, 네 명 모두 생일이 다를 확률을 구하여 1에서 이 값을 빼면 된다.

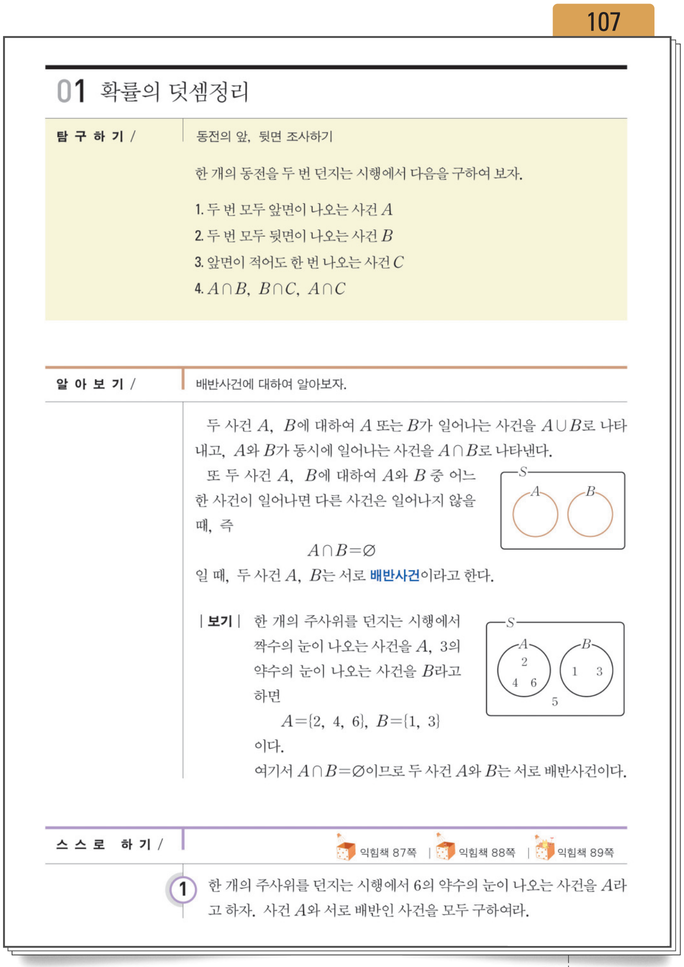
일반적으로 n명$(n\le366)$이 있을 때, 이들이 모두 생일이 다를 확률을 p라고 하면

$$p=\left(1-\frac{1}{366}\right)\left(1-\frac{2}{366}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{366}\right)$$

n이 여러 가지 값을 가질 때 확률 p의 값을 구하면 다음 표와 같다.

n	p	$1-p$
2	0.9973	0.0027
4	0.9837	0.0163
10	0.8834	0.1166
20	0.5894	0.4106
40	0.1095	0.8905
60	0.0060	0.9940
80	0.0001	0.9999
100	0.0000003	0.9999997

위의 표에서 보는 바와 같이, 4명 중에서 생일이 같은 사람이 있을 확률은 약 1.6 % 정도로 매우 작지만, 80명 중에서 생일이 같은 사람이 있을 확률은 99.99 %이다. 또 100명 이상의 사람이 있으면 이들 중에는 생일이 같은 사람이 거의 틀림없이 있다고 보아도 될 것이다.



01 확률의 덧셈정리

탐 구 하 기 / 동전의 앞, 뒷면 조사하기

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 다음을 구하여 보자.

1. 두 번 모두 앞면이 나오는 사건 A
2. 두 번 모두 뒷면이 나오는 사건 B
3. 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건 C
4. $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$

알 아 보 기 / 배반사건에 대하여 알아보자.

두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$로 나타내고, A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$로 나타낸다.

또 두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 **배반사건**이라고 한다.

| 보기 | 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 3\}$

이다.

여기서 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하자. 사건 A와 서로 배반인 사건을 모두 구하여라.

탐구하기 / 풀이

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{\text{HH, HT, TH, TT}\}$

1. 두 번 모두 앞면이 나오는 것은 HH이므로

$A=\{\textbf{HH}\}$

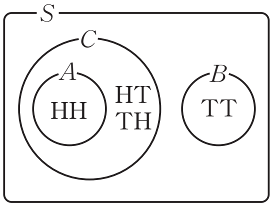
2. 두 번 모두 뒷면이 나오는 것은 TT이므로

$B=\{\textbf{TT}\}$

3. 앞면이 적어도 한 번 나오는 것은 두 번 모두 앞면이 나오거나 한 번은 앞면, 한 번은 뒷면이 나오는 것이다.

$\therefore\ C=\{\textbf{HH, HT, TH}\}$

4. 위의 표본공간 S와 세 사건 A, B, C를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$,

$A\cap C=\{\textbf{HH}\}$

알아보기 / 해설

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 하였다.

따라서 사건을 나타낼 때에 집합에서 쓰는 기호를 사용하면 매우 편리하다.

이런 뜻에서, 서로 배반인 두 사건 A, B를

$A\cap B=\varnothing$

으로 정의하는 것은 자연스러운 일이다.

스스로 하기 / 풀이

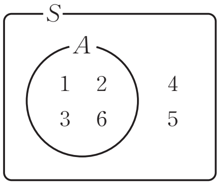
1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간은

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

또 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 사건 A는

$A=\{1, 2, 3, 6\}$

표본공간 S와 사건 A를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



사건 A와 서로 배반인 사건은 A와 공통 부분이 없어야 하므로 $S-A=\{4, 5\}$의 부분집합을 찾으면 된다. 즉,

$\varnothing$, $\{\mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{5}\}$, $\{\mathbf{4, 5}\}$

보충 학습

표본공간, 사건 등을 집합과 연결지어 생각하면 확률을 계산하는 데 편리하다.

표본공간 또는 전체 사건	⟷	전체집합
사건	⟷	부분집합
합사건	⟷	합집합
공사건	⟷	공집합
여사건	⟷	여집합

알 아 보 기 / 확률의 덧셈정리에 대하여 알아보자.

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립하므로 사건 $A\cup B$가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}\\&=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 덧셈정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

2 어느 마을에서 포도를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{3}{5}$, 배를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{2}$이고 포도와 배를 모두 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{5}$이다. 이 마을에서 한 가구를 임의로 택할 때, 그 가구가 포도 또는 배를 재배할 확률을 구하여라.

3 빨간 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있는 상자에서 3개의 공을 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색일 확률을 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

2 포도를 재배하는 가구가 택해질 사건을 A, 배를 재배하는 가구가 택해질 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

이때, 포도와 배를 모두 재배하는 가구는 $A\cap B$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{9}{10}}\end{aligned}$$

3 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색의 공이 나오려면 3개 모두 빨간 공이 나오거나 3개 모두 검은 공이 나와야 한다.

이때, 3개 모두 빨간 공이 나오는 사건을 A, 3개 모두 검은 공이 나오는 사건을 B라고 하자.

10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)

(i) 3개 모두 빨간 공이 나오는 경우의 수는

${}_{4}\mathrm{C}_3=4$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

(ii) 3개 모두 검은 공이 나오는 경우의 수는

${}_{6}\mathrm{C}_3=20$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

그런데 두 사건 A, B는 동시에 일어날 수 없으므로 $A\cap B=\varnothing$이다.

따라서 구하는 확률은

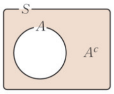
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}\\&=\frac{6}{30}=\mathbf{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

109

02 여사건의 확률

알 아 보 기 / 여사건의 확률에 대하여 알아보자.

어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.



이제 사건 A의 여사건 A^C의 확률을 구하여 보자.

$A \cup A^C = S$, $A \cap A^C = \varnothing$이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **여사건의 확률**
> 임의의 사건 A에 대하여 $\quad \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

함 께 하 기 / 익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

1 4명의 남자와 3명의 여자 중에서 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률을 구하여라.

풀이

적어도 1명은 여자일 사건을 A라고 하자. 이때, A^C은 여자가 1명도 뽑히지 않는 사건, 즉 2명 모두 남자일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

따라서 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 87쪽 | 익힘책 88쪽 | 익힘책 89쪽

1 흰색 초콜릿 3개와 밤색 초콜릿 7개가 들어 있는 상자에서 3개의 초콜릿을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

여사건에 대한 확률을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

표본공간 S와 사건 A에 대하여

$A^C=S-A$

$n(A^C)=n(S)-n(A)$

$$\frac{n(A^C)}{n(S)}=\frac{n(S)}{n(S)}-\frac{n(A)}{n(S)}$$

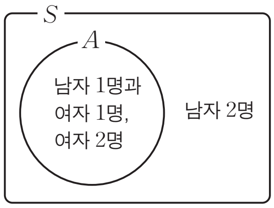
$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

참고 | A^C

여사건을 영어로 complementary event라고 한다. 그래서 complementary의 첫 글자 c를 어깨에 써서 여사건을 나타낸다.

함께하기 / 해설

1 4명의 남자와 3명의 여자 중에서 대표 2명을 뽑을 때, 모든 경우는 다음 그림과 같다.



$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\text{남자 1명과 여자 1명})+\mathrm{P}(\text{여자 2명})$$

$$=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

이와 같이 남자 1명과 여자 1명일 사건의 확률, 여자 2명일 사건의 확률을 각각 구하여 확률의 덧셈정리를 이용할 수도 있지만 본문의 풀이와 같이 여사건의 확률을 이용하면 더 간단하게 구할 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 사건을 A라고 하면 A^C은 흰색 초콜릿이 한 개도 없는 사건, 즉 초콜릿 3개가 모두 밤색 초콜릿일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}}=\frac{7}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{24}=\mathbf{\frac{17}{24}}$$

중단원 확인하기 / 풀이

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
시행, 수학적 확률, 통계적 확률, 배반사건, 여사건, P(A)

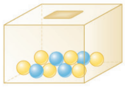
1. 확률의 뜻과 활용

수학적 확률 — 이해

1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 눈의 수가 6의 약수일 확률을 구하여라.

수학적 확률 — 이해

2 노란 구슬 6개와 파란 구슬 4개가 들어 있는 상자가 있다. 다음을 구하여라.



(1) 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 2개가 모두 노란 구슬일 확률

(2) 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개가 나올 확률

통계적 확률 — 문제 해결

3 어느 지역 주민 5만 명 중에서 625명이 환경 보호 단체의 회원이라고 한다. 이 지역 주민 1명을 택하였을 때, 그 사람이 환경 보호 단체의 회원일 확률을 구하여라.

확률의 계산 — 이해

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 번 모두 같은 눈의 수가 나올 확률

(2) 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 될 확률

(3) 두 눈의 수의 차가 3이 될 확률

(4) 두 눈의 수의 합이 3 이상이 될 확률

혈액형 — 의사소통

5 어떤 모임에 10명이 참석하였는데 이들 중 3명의 혈액형이 A형이라고 한다. 이들 중 두 명을 임의로 택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 명이 모두 A형일 확률

(2) 적어도 한 명이 A형일 확률

---

1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 나올 수 있는 눈의 수는

1, 2, 3, 4, 5, 6

의 6가지

나오는 눈의 수가 6의 약수인 경우는

1, 2, 3, 6

의 4가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

2 (1) 전체 구슬에서 2개를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2$가지

노란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2$가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) 전체 구슬에서 4개를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4$가지

노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2$(가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}}=\mathbf{\frac{3}{7}}$$

3 어느 지역 주민 5만 명 중 환경 보호 단체의 회원이 625명이므로 이 지역 주민 1명을 택하였을 때, 그 사람이 환경 보호 단체의 회원일 통계적 확률은

$$\frac{625}{50000}=\mathbf{\frac{1}{80}}$$

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

(1) 두 번 모두 같은 눈의 수가 나올 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3),
(4, 4), (5, 5), (6, 6)

의 6가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 4 또는 8 또는 12인 경우이다.

(i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)

의 3가지

(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

의 5가지

(ⅲ) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는

(6, 6)

의 1가지

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{36}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

(3) 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

(1, 4), (2, 5), (3, 6),

(4, 1), (5, 2), (6, 3)

의 6가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(4) 두 눈의 수의 합이 3 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 눈의 수의 합이 3 미만, 즉 두 눈의 수의 합이 2인 사건이다.

두 눈의 수의 합이 2인 경우는

(1, 1)

의 1가지이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{36}$$
$$=\frac{35}{36}$$

5 (1) 전체 10명 중 두 명을 택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_2$가지

A형인 3명 중 두 명을 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2$가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\mathbf{\frac{1}{15}}$$

(2) 택한 두 명 중 적어도 한 명이 A형일 사건을 A라고 하면 A^C은 택한 두 명이 모두 A형이 아닌 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{7\times6}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{7}{15}=\mathbf{\frac{8}{15}}$$

| 다른 풀이 |

택한 두 명 중 적어도 한 명이 A형인 경우는 한 명만 A형인 경우 또는 두 명 모두 A형인 경우이다.

(ⅰ) 한 명만 A형인 경우는

A형인 3명 중 한 명을 택하고 A형이 아닌 7명 중 한 명을 택하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1$(가지)

따라서 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{3\times7}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{7}{15}$$

(ⅱ) 두 명 모두 A형인 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2$가지

따라서 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{1}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$$

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.245

01 기본

triangle을 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 모음이 모두 홀수 번째 자리에 올 확률은?

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{2}{21}$

02 기본

여학생 2명과 남학생 2명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하여라.

(1) 남학생이 양쪽 끝에 서게 될 확률
(2) 여학생과 남학생이 번갈아 가며 서게 될 확률
(3) 여학생끼리 이웃하여 서게 될 확률

1에서 5까지 적힌 공 중에서 2개를 꺼내고 6이 적힌 공을 꺼낸다.

03 실력

주머니 속에 1부터 10까지의 번호가 하나씩 적힌 같은 크기의 공 10개가 들어 있다. 이 중에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나온 번호의 최댓값이 6이 될 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

04 실력

10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 100원짜리 동전 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 6개의 동전을 꺼낼 때, 금액의 합이 500원 이상일 확률을 구하여라. (단, 각각의 동전이 뽑힐 확률은 같다.)

05 기본

어느 프로야구 선수의 지난 시즌까지의 통산 타율이 0.295였다. 이 선수가 이번 시즌에 200타석에서 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여라.

06 기본

주머니 속에 흰 공이 3개, 빨간 공이 4개, 노란 공이 n개 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 1000번 반복하였더니 그중 흰 공이 250번 나왔다. 이때, n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

07 바탕

흰 공 3개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 꺼낸 두 공의 색이 같을 확률

(2) 꺼낸 두 공의 색이 다를 확률

08 기본

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 두 사건 A, B가 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{6, 7\}$일 때, 두 사건 A, B 모두와 서로 배반인 사건의 개수를 구하여라.

09 바탕

1부터 300까지의 자연수 중에서 하나의 수를 임의로 뽑을 때, 그 수가 다음과 같을 확률을 구하여라.

(1) 3의 배수
(2) 4의 배수
(3) 3의 배수 또는 4의 배수

10 바탕

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나오는 눈의 수의 합이 6 또는 8일 확률
(2) 나오는 눈의 수의 합이 3 이하이거나 11 이상일 확률

11 기본

10개의 제비 중에서 당첨 제비가 3개 들어 있다. 갑, 을의 순서로 제비를 하나씩 뽑을 때, 다음을 구하여라. (단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

(1) 갑이 당첨될 확률
(2) 갑과 을이 모두 당첨될 확률
(3) 갑은 당첨되지 않고, 을이 당첨될 확률
(4) 을이 당첨될 확률

세 사람이 비기는 경우는 모두 같은 것을 내거나 모두 다른 것을 내는 경우이다.

12 기본

세 사람이 가위바위보를 할 때, 비길 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

13 기본

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$ 일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

14 실력

5개의 검은 공과 3개의 흰 공이 들어 있는 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣은 다음, 다시 1개의 공을 꺼내어 색을 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 공의 색이 같을 확률 (2) 두 공의 색이 다를 확률

'적어도~' 라는 문구가 나오면 여사건의 확률을 이용한다.

15 기본

남학생 3명과 여학생 2명을 일렬로 세울 때, 적어도 한쪽 끝에는 여학생이 서는 확률은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

16 실력

주머니 속에 같은 크기의 흰 구슬, 노란 구슬이 모두 10개 들어 있다. 이 중에서 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 노란 구슬일 확률이 $\frac{8}{15}$이다. 이때, 노란 구슬의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

2 조건부확률

이 단원을 배우면

- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1 조건부확률과 확률의 곱셈정리

112

2 조건부확률

1 조건부확률과 확률의 곱셈정리

학습 목표

- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
- 독립시행의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / 당첨 제비뽑기

제비를 뽑을 때, 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑으면 나중에 뽑는 사람은 불리하고, 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑지 못하면 나중에 뽑는 사람이 유리하다.

그러나 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 수도 있고 뽑지 못할 수도 있으므로 결과적으로는 두 사람 모두 당첨 제비를 뽑을 확률은 같다.

소단원의 학습 목표

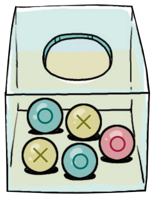
1. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
2. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
4. 독립시행의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

조건부확률, $\mathrm{P}(B|A)$, 독립, 종속, 독립시행

다가서기 / 해설

오른쪽 그림과 같이 당첨 제비를 ◯로, 당첨 제비가 아닌 것을 ×로 나타내자.



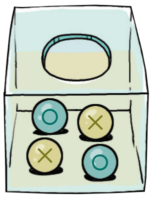
오른쪽 상자에서 어떤 사람이 먼저 한 개를 뽑을 때, 그것이 당첨 제비(◯)일 확률은

$$\frac{3}{5}$$

이제 나중에 뽑는 사람이 당첨 제비(◯)를 뽑을 확률을 구하여 보자.

(ⅰ) 먼저 뽑은 사람이 당첨 제비를 뽑은 경우

이 경우에는 상자에 당첨 제비가 2개, 당첨 제비가 아닌 것이 2개 남아 있다.



그러므로 나중에 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

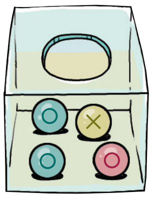
$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

나중 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률

처음 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률

(ⅱ) 먼저 뽑은 사람이 당첨 제비를 뽑지 못한 경우

이 경우에는 상자에 당첨 제비가 3개, 당첨 제비가 아닌 것이 1개 남아 있다.



그러므로 나중에 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

나중 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률

처음 사람이 당첨 제비를 뽑지 못할 확률

따라서 나중 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

탐구하기 / **풀이**

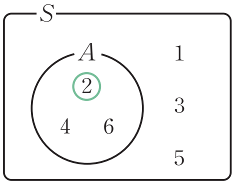
한 개의 주사위를 던질 때의 표본공간 S는

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

1. 나온 눈의 수가 짝수이면서 소수인 것은 2 하나 뿐이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{1}{6}$이다.

2. 짝수가 나올 사건을 A라고 하면 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$이고, 여기서 소수인 것은 2뿐이다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{n(\{2\})}{n(\{2,\ 4,\ 6\})}=\frac{1}{3}$$

[참고] 짝수가 나왔을 때 그것이 소수일 확률을 구하는 것과 같이 '…일 때' 라는 조건이 붙으면 '…' 을 표본공간 전체로 보면 된다.

01 조건부확률의 뜻

탐 구 하 기 / 조건이 주어진 확률 구하기

한 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하여 보자.

1. 나온 눈의 수가 짝수이면서 소수일 확률
2. 짝수가 나왔을 때, 그것이 소수일 확률

알 아 보 기 / 조건부확률의 뜻을 알아보자.

오른쪽 표는 어느 풍물패 동아리의 회원 구성을 나타낸 것이다.

회원 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 남자가 선택되었다. 이 사람이 2학년일 확률을 구하여 보자.

	1학년	2학년	합계
남자	10	6	16
여자	7	7	14
합계	17	13	30

한 명을 뽑을 때 전체 사건을 S, 뽑힌 사람이 남자일 사건을 A, 2학년일 사건을 B라고 하면

$$n(S)=30,\ n(A)=16,\ n(B)=13,\ n(A\cap B)=6$$

따라서 회원 중에서 한 명을 뽑을 때 뽑힌 사람이 2학년 남자일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{6}{30}$$

그러나 뽑힌 사람이 남자일 때, 그 사람이 2학년일 확률은

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{6}{16}$$

일반적으로 어떤 시행에서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

이다.

알아보기 / **해설**

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 표본공간으로 생각하는 확률이다.

따라서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 것은 전체적으로는 $A\cap B$와 같은 것이다.

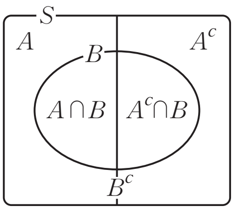
즉, 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 표본공간으로 생각할 때, 사건 $A\cap B$의 확률이다.

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$를 일반적으로 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

보충 학습

표본공간 S의 근원사건이 같은 정도로 일어날 것으로 기대될 때, 오른쪽 그림에서



$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

한편

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\text{이므로}$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

조건부확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

함 께 하 기 /

익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 소수일 때, 그것이 홀수일 확률을 구하여라.

풀이

소수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$, $A\cap B=\{3,\ 5\}$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 오른쪽 표는 어느 동아리 학생 30명에 대하여 안경을 쓴 학생의 수를 남녀별로 조사한 것이다. 다음을 구하여라.

(단위: 명)

	안경 씀	안경 안 씀	합계
남학생 수	6	10	16
여학생 수	5	9	14
합계	11	19	30

(1) 여학생 중에서 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 안경을 쓴 학생일 확률

(2) 안경을 안 쓴 학생 중에서 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 남학생일 확률

2 CD를 만드는 두 회사 A, B의 제품 불량률은 각각 2 %와 3 %이다. 두 회사 A, B의 CD가 각각 100장씩 섞여 있는 상자 안에서 1장을 꺼냈더니 불량품이었다. 이 불량품이 A 회사의 제품일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

$\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(A|B)$를 혼동하지 않아야 한다. 즉, $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 말하고, $\mathrm{P}(A|B)$는 사건 B가 일어났을 때, 사건 A가 일어날 확률을 말한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} \text{ (단, } \mathrm{P}(B)\neq 0)$$

스스로 하기 / 풀이

1 여학생이 뽑히는 사건을 F, 남학생이 뽑히는 사건을 M, 안경을 쓴 학생이 뽑히는 사건을 G, 안경을 안 쓴 학생이 뽑히는 사건을 N이라고 하자.

(1) 구하는 확률은 사건 F가 일어났을 때의 사건 G의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(G|F)=\frac{\mathrm{P}(G\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\frac{\frac{5}{30}}{\frac{14}{30}}=\mathbf{\frac{5}{14}}$$

(2) 구하는 확률은 사건 N이 일어났을 때의 사건 M의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(M|N)=\frac{\mathrm{P}(M\cap N)}{\mathrm{P}(N)}=\frac{\frac{10}{30}}{\frac{19}{30}}=\mathbf{\frac{10}{19}}$$

2 A 회사의 제품이 나오는 사건을 A, 불량품이 나오는 사건을 D라고 하자.

A 회사의 제품 100장 중에는 불량품이 2장, B 회사의 제품 100장 중에는 불량품이 3장 들어 있으므로

$$\mathrm{P}(D)=\frac{5}{200},\quad \mathrm{P}(A\cap D)=\frac{2}{200}$$

구하는 확률은 사건 D가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(A|D)=\frac{\mathrm{P}(A\cap D)}{\mathrm{P}(D)}=\frac{\frac{2}{200}}{\frac{5}{200}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

알아보기 / 해설

조건부확률의 정의에서 다음과 같은 확률의 곱셈정리를 얻는다.

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)$ ……㉠

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서

$\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

02 확률의 곱셈정리

알 아 보 기 / 확률의 곱셈정리를 알아보자.

조건부확률의 정의에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$임을 알 수 있다.
또한 A, B를 바꾸어 생각하면 다음의 곱셈정리를 얻는다.

확률의 곱셈정리
두 사건 A, B에 대하여
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$
(단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

함 께 하 기 / 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 10개의 송편 중에서 4개에는 콩이 들어 있고 6개에는 깨가 들어 있다. 이 중에서 두 개의 송편을 먹을 때, 첫 번째는 깨가 들어 있는 송편을 먹고 두 번째는 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률을 구하여라.

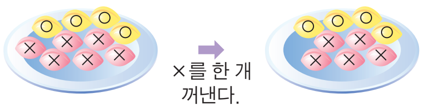
풀이
첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹는 사건을 A라고 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$
두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹는 사건을 B라고 하면, 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹었을 때, 두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{9}$
따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{15}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 흰색 탁구공 4개와 노란색 탁구공 8개가 들어 있는 상자에서 탁구공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째는 흰색 탁구공이 나오고 두 번째는 노란색 탁구공이 나올 확률을 구하여라.
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

함께하기 / 해설

1 콩이 들어 있는 송편을 ○, 깨가 들어 있는 송편을 ×라고 표시하자.
첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹으면 남아 있는 송편은 | 그림2 | 와 같아진다.

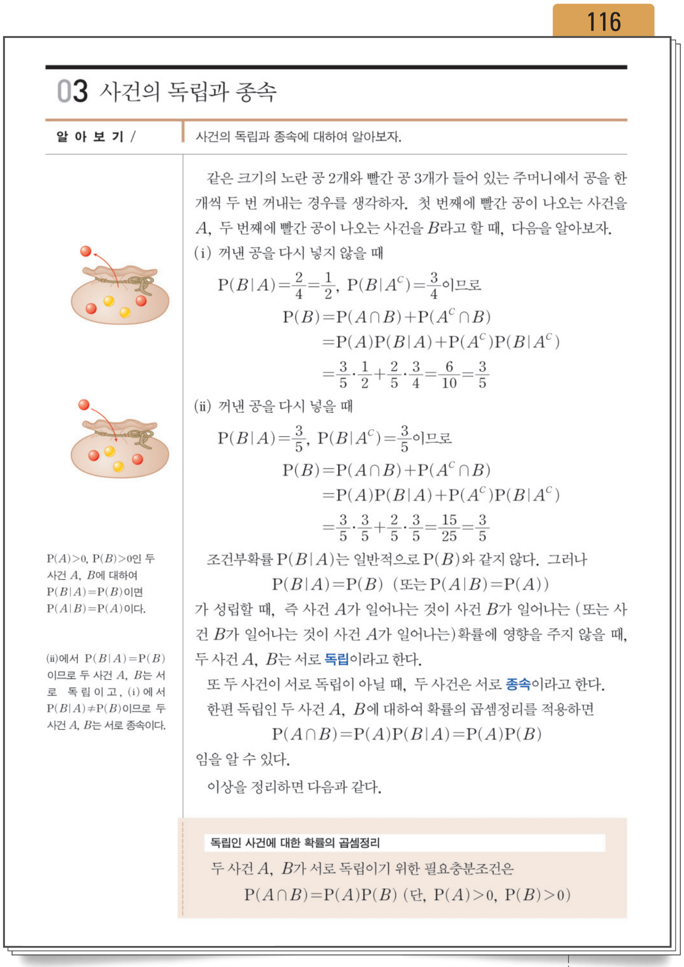


| 그림1 | | 그림2 |

한편 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹는 사건을 A, 두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.
또 $\mathrm{P}(B|A)$는 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹었을 때, 두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률이다.

스스로 하기 / 풀이

1 첫 번째에 흰색 탁구공이 나오는 사건을 A라고 하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$
두 번째에 노란색 탁구공이 나오는 사건을 B라고 하면 첫 번째에 흰색 탁구공이 나왔을 때, 두 번째에 노란색 탁구공이 나올 확률은 (흰색 탁구공을 하나 꺼냈으므로 흰색 탁구공이 3개, 노란색 탁구공이 8개가 남아 있다.)
$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{8}{11}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{11}=\mathbf{\frac{8}{33}}$$


116

03 사건의 독립과 종속

알 아 보 기 / 사건의 독립과 종속에 대하여 알아보자.

같은 크기의 노란 공 2개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개씩 두 번 꺼내는 경우를 생각하자. 첫 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, 다음을 알아보자.

(i) 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

(ii) 꺼낸 공을 다시 넣을 때

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이면 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$이다.

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 일반적으로 $\mathrm{P}(B)$와 같지 않다. 그러나

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\ \ (\text{또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A))$$

가 성립할 때, 즉 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어나는 (또는 사건 B가 일어나는 것이 사건 A가 일어나는)확률에 영향을 주지 않을 때, 두 사건 A, B는 서로 **독립**이라고 한다.

(ii)에서 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이고, (i)에서 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

또 두 사건이 서로 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 **종속**이라고 한다.

한편 독립인 두 사건 A, B에 대하여 확률의 곱셈정리를 적용하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

독립인 사건에 대한 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

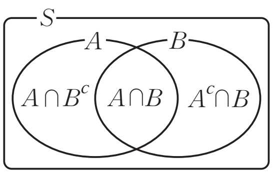
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

알아보기 / 해설

• 다음 벤 다이어그램에서 보는 바와 같이

$$B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$$

이고 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 공통 부분이 없다.



$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}\{(A\cap B)\cup(A^C\cap B)\}\\&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\end{aligned}$$

• 조건부확률에서 일반적으로 $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(B)$는 서로 같지 않다. 그러나 이들이 서로 같을 때가 있다. 이때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다.

보충 학습

1. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$의 뜻은 사건 A가 일어나든, 일어나지 않든 사건 B가 일어날 확률이 같다는 것이다. 즉, 사건 B가 사건 A에 대하여 독립이다.
한편 사건 B가 사건 A에 대하여 독립이면 사건 A가 사건 B에 대하여 독립이다. 즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

2. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$
$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$
임을 증명하여 보자.

$$\begin{aligned}(\Longrightarrow)\ \mathrm{P}(A|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Longleftarrow)\ \mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

3. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$
$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
임을 증명하여 보자.

$$\begin{aligned}(\Longrightarrow)\ \mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Longleftarrow)\ \mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $A\cap B=\{2\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\text{이므로}$$

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(2) $A\cap C=\varnothing$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\text{이므로}$$

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

함 께 하 기 / 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 1에서 10까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 자연수를 택할 때, 짝수가 나오는 사건을 A, 3의 배수가 나오는 사건을 B, 5의 배수가 나오는 사건을 C라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A, B는 서로 종속임을 보여라.

(2) 두 사건 A, C는 서로 독립임을 보여라.

풀이

세 사건 A, B, C는 각각 다음과 같다.

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\},\ B=\{3,\ 6,\ 9\},\ C=\{5,\ 10\}$$

(1) $A\cap B=\{6\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $A\cap C=\{10\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{5}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 정사면체의 각 면에 1, 2, 3, 4가 적혀 있다. 이 정사면체를 던져서 밑면에 있는 수를 관찰할 때, 세 사건

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\{2,\ 3\},\ C=\{3,\ 4\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A, B는 서로 독립임을 보여라.

(2) 두 사건 A, C는 서로 종속임을 보여라.

2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째는 소수의 눈이 나오고 두 번째는 합성수의 눈이 나올 확률을 구하여라.

2 주사위를 두 번 던질 때의 표본공간 S는

$$\begin{aligned}S=\{&(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots\ (1,\ 6),\\ &(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots\ (2,\ 6),\\ &\qquad\vdots\\ &(6,\ 1),\ (6,\ 2),\ \cdots\ (6,\ 6)\}\end{aligned}$$

이고, 그 원소의 개수는 $6\times6=36$(개)이다.

6 이하의 소수는 2, 3, 5이고 합성수는 4, 6이므로 첫 번째에 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 두 번째에 합성수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$\begin{aligned}A=\{&(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2,\ 6),\\ &(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots,\ (3,\ 6),\\ &(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ \cdots,\ (5,\ 6)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B=\{&(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ \cdots,\ (6,\ 4),\\ &(1,\ 6),\ (2,\ 6),\ \cdots,\ (6,\ 6)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\cap B=\{&(2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\\ &(5,\ 4),\ (5,\ 6)\}\end{aligned}$$

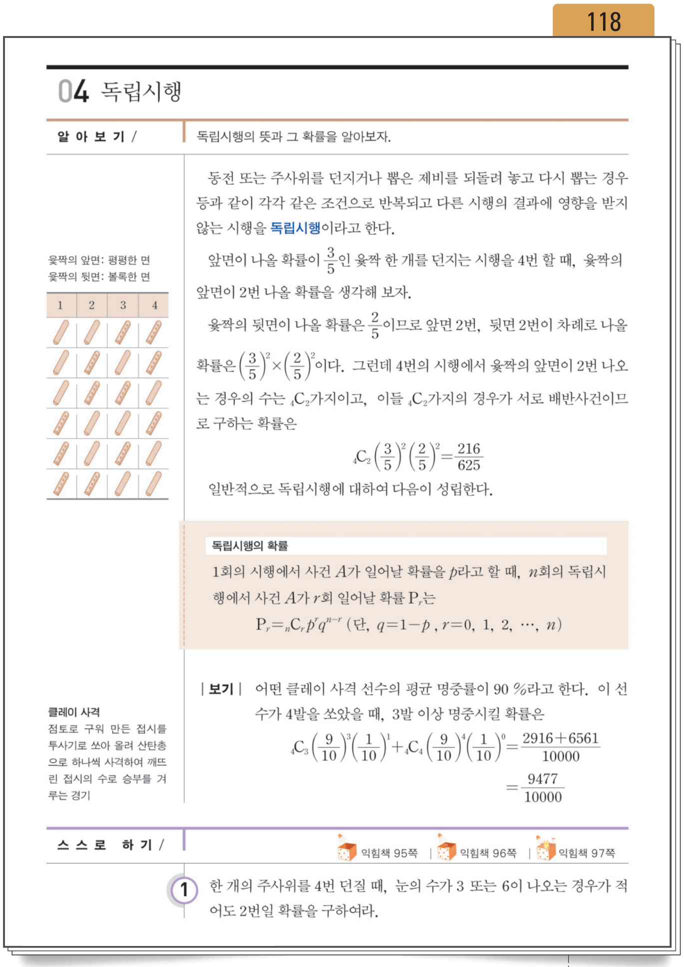
$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

[참고] $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립임을 알 수 있다.


118

04 독립시행

알 아 보 기 / 독립시행의 뜻과 그 확률을 알아보자.

동전 또는 주사위를 던지거나 뽑은 제비를 되돌려 놓고 다시 뽑는 경우 등과 같이 각각 같은 조건으로 반복되고 다른 시행의 결과에 영향을 받지 않는 시행을 **독립시행**이라고 한다.

윷짝의 앞면: 평평한 면
윷짝의 뒷면: 볼록한 면

앞면이 나올 확률이 $\frac{3}{5}$인 윷짝 한 개를 던지는 시행을 4번 할 때, 윷짝의 앞면이 2번 나올 확률을 생각해 보자.

윷짝의 뒷면이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 앞면 2번, 뒷면 2번이 차례로 나올 확률은 $\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2$이다. 그런데 4번의 시행에서 윷짝의 앞면이 2번 나오는 경우의 수는 ${}_4C_2$가지이고, 이들 ${}_4C_2$가지의 경우가 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$$

일반적으로 독립시행에 대하여 다음이 성립한다.

독립시행의 확률

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률 P_r는

$$P_r={}_nC_r p^r q^{n-r} \text{ (단, } q=1-p\text{ , } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{)}$$

클레이 사격
점토로 구워 만든 접시를 투사기로 쏘아 올려 산탄총으로 하나씩 사격하여 깨뜨린 접시의 수로 승부를 겨루는 경기

| **보기** | 어떤 클레이 사격 선수의 평균 명중률이 90 %라고 한다. 이 선수가 4발을 쏘았을 때, 3발 이상 명중시킬 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{9}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{9}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)^0=\frac{2916+6561}{10000}=\frac{9477}{10000}$$

스 스 로 하 기 /
익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽 | 익힘책 97쪽

1 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 눈의 수가 3 또는 6이 나오는 경우가 적어도 2번일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

• 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째 시행의 결과와 두 번째 시행의 결과는 서로 독립이다.
예를 들어 첫 번째에 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 두 번째에 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$에서

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.
이와 같이 주사위 또는 동전을 던지거나, 복원추출의 경우에는 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과와 서로 독립이다. 이런 뜻에서 이러한 시행들을 독립시행이라고 한다.

• 독립시행의 확률을 구할 때는 각 사건이 일어날 확률을 구하고, n번의 독립시행에서 그 경우가 몇 번 일어나는가를 생각해야 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 주사위를 한 번 던져서 3 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

3 또는 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81} \quad \cdots\cdots ㉠$$

3 또는 6의 눈이 한 번만 나올 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 구하는 확률은

$$1-\left(\frac{16}{81}+\frac{32}{81}\right)=1-\frac{48}{81}=\mathbf{\frac{11}{27}}$$

| **다른 풀이** |
3 또는 6의 눈이 2번 나올 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81} \quad \cdots\cdots ㉠$$

3 또는 6의 눈이 3번 나올 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81} \quad \cdots\cdots ㉡$$

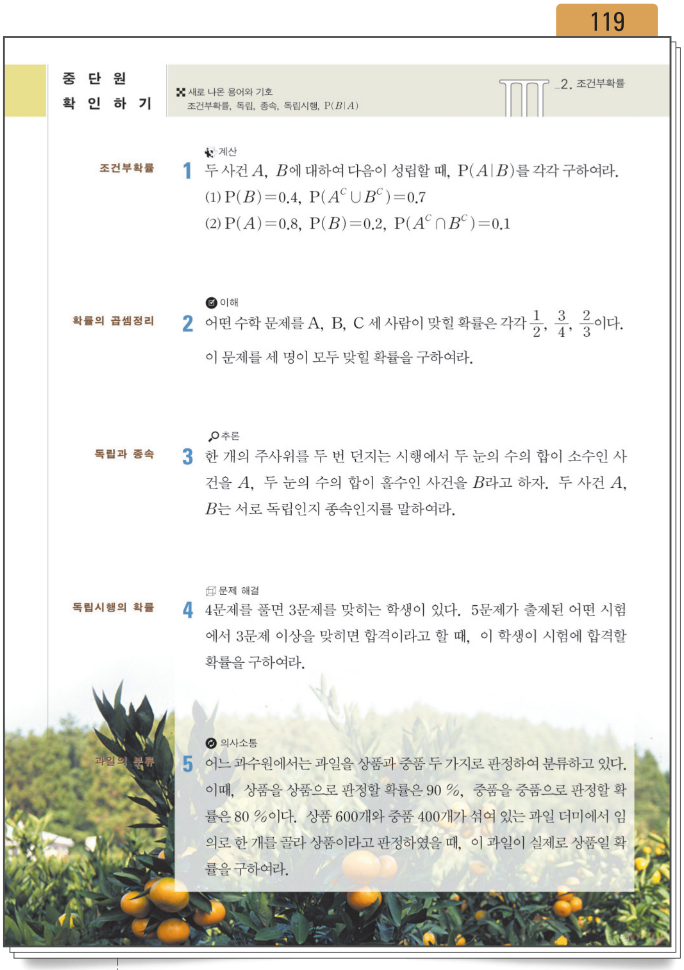
3 또는 6의 눈이 4번 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 확률은

$$\frac{24}{81}+\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{33}{81}=\frac{11}{27}$$

중단원 확인하기 / 풀이



중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
조건부확률, 독립, 종속, 독립시행, $P(B|A)$

2. 조건부확률

조건부확률

계산

1 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립할 때, $P(A|B)$를 각각 구하여라.

(1) $P(B)=0.4$, $P(A^C \cup B^C)=0.7$

(2) $P(A)=0.8$, $P(B)=0.2$, $P(A^C \cap B^C)=0.1$

확률의 곱셈정리

이해

2 어떤 수학 문제를 A, B, C 세 사람이 맞힐 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$이다. 이 문제를 세 명이 모두 맞힐 확률을 구하여라.

독립과 종속

추론

3 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 두 눈의 수의 합이 소수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 홀수인 사건을 B라고 하자. 두 사건 A, B는 서로 독립인지 종속인지를 말하여라.

독립시행의 확률

문제 해결

4 4문제를 풀면 3문제를 맞히는 학생이 있다. 5문제가 출제된 어떤 시험에서 3문제 이상을 맞히면 합격이라고 할 때, 이 학생이 시험에 합격할 확률을 구하여라.

과일의 분류

의사소통

5 어느 과수원에서는 과일을 상품과 중품 두 가지로 판정하여 분류하고 있다. 이때, 상품을 상품으로 판정할 확률은 90 %, 중품을 중품으로 판정할 확률은 80 %이다. 상품 600개와 중품 400개가 섞여 있는 과일 더미에서 임의로 한 개를 골라 상품이라고 판정하였을 때, 이 과일이 실제로 상품일 확률을 구하여라.

1 (1) $P(A^C \cup B^C)=P((A \cap B)^C)$

$=0.7$

이므로

$P(A \cap B)=1-P((A \cap B)^C)$

$=1-0.7$

$=0.3$

$\therefore P(A|B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$=\dfrac{0.3}{0.4}$

$=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

(2) $P(A^C \cap B^C)=P((A \cup B)^C)$

$=0.1$

이므로

$P(A \cup B)=1-P((A \cup B)^C)$

$=1-0.1$

$=0.9$

또

$P(A \cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A \cup B)$

이므로

$P(A \cap B)=0.8+0.2-0.9$

$=0.1$

$\therefore P(A|B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$=\dfrac{0.1}{0.2}$

$=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

2 A가 문제를 맞히는 사건을 A, B가 문제를 맞히는 사건을 B, C가 문제를 맞히는 사건을 C라고 하면 세 사건 A, B, C는 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$P(A \cap B \cap C)=P(A)P(B)P(C)$

$=\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3}$

$=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6 \times 6=36$(가지)

두 눈의 수의 합이 소수인 사건 A는

$A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 4),$
$(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 6),$
$(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),$
$(6,\ 1),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)\}$

에서 15가지이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

두 눈의 수의 합이 홀수인 사건 B는

$$B=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)\}$$

에서 18가지이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

또 두 눈의 수의 합이 소수이면서 홀수인 사건 $A\cap B$는

$$A\cap B=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)\}$$

에서 14가지이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$$

이때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

4 4문제를 풀면 3문제를 맞히므로 한 문제에 대하여 맞힐 확률은 $\frac{3}{4}$이다. 이때, 이 시험에 합격하려면 5문제 중에서 3문제 이상을 맞혀야 하므로 3문제 또는 4문제 또는 5문제를 맞혀야 한다.

3문제를 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

4문제를 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

5문제를 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0$$

따라서 이 학생이 시험에 합격할 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$$=10\times\frac{27}{1024}+5\times\frac{81}{1024}+\frac{243}{1024}$$

$$=\frac{918}{1024}=\boldsymbol{\frac{459}{512}}$$

5 과일 더미에서 임의로 한 개를 고를 때, 고른 과일이 상품인 사건을 A, 고른 과일을 상품으로 판정하는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{600}{1000}=\frac{3}{5}$$

고른 과일이 상품이고 그 과일을 상품으로 판정할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{600}{1000}\times\frac{90}{100}$$

고른 과일이 중품이고 그 과일을 상품으로 판정할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{400}{1000}\left(1-\frac{80}{100}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$

$$=\frac{600}{1000}\times\frac{90}{100}+\frac{400}{1000}\left(1-\frac{80}{100}\right)$$

$$=\frac{27}{50}+\frac{4}{50}=\frac{31}{50}$$

따라서 과일 더미에서 임의로 한 개를 골라 상품이라고 판정하였을 때, 이 과일이 실제로 상품일 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{\frac{27}{50}}{\frac{31}{50}}=\boldsymbol{\frac{27}{31}}$$

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.248

01 바탕

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어날 확률이 0.6이고, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률이 0.35라고 한다. 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 구하여라.

02 실력

어떤 학생이 5지선다형의 객관식 문제를 풀고 있다. 이 학생은 정답을 알 때는 그 답을 정확히 쓰고, 정답을 모를 때는 아무 답이나 쓴다. 또 이 학생이 각 문제의 정답을 알고 있을 확률은 $\frac{3}{4}$이라고 한다. 이 학생이 정답을 맞혔을 때, 실제로 정답을 알고 맞혔을 확률을 구하여라.

03 기본

흰 공이 3개, 푸른 공이 2개 들어 있는 주머니에서 공을 1개씩 두 번 꺼낸다. 첫 번째는 흰 공이 나오고, 두 번째는 푸른 공이 나올 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

04 기본

두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립할 때, $\mathrm{P}(B)$를 구하여라.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{3}$$

05 바탕

표본공간 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 두 사건 A, B가

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\quad B=\{3,\ 4\}$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 독립인지, 종속인지 말하여라.

06 기본

어떤 제품이 담겨 있는 상자 중에서 사은품이 들어 있는 비율이 20 %라고 한다. 임의로 4개의 상자를 꺼낼 때, 사은품이 들어 있는 상자가 적어도 3개 나올 확률을 구하여라.

07 기본

어떤 농구 선수의 자유투 성공률이 $\frac{2}{3}$라고 한다. 이 선수가 3번의 자유투를 던질 때, 몇 번 성공할 확률이 가장 큰지 구하여라.

08 실력

6발 쏘아서 평균 3발을 명중시키는 사수가 있다. 이 사수가 적어도 1발을 명중시킬 확률이 0.999보다 크기 위하여 최소한 몇 발을 쏘아야 하는가?

① 6발 ② 7발 ③ 8발
④ 9발 ⑤ 10발

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.250

01

$\mathrm{P}(A)=0.3,\ \mathrm{P}(B)=0.2,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.4$ 일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

02

1에서 9까지 적힌 9장의 카드 중에서 2장을 뽑을 때, 두 수의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

03

동욱이네 동아리에는 남학생 6명, 여학생 4명이 있다. 동아리 방 청소 당번 2명을 뽑을 때, 2명 모두 남학생이거나 2명 모두 여학생일 확률은?

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{7}{15}$
④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

04

50개의 제품 중 3개의 불량품이 들어 있는 상자에서 제품을 1회에 1개씩 두 번 꺼낼 때, 두 번 모두 불량품일 확률은?

(단, 꺼낸 제품은 상자에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{625}$ ② $\frac{2}{1225}$ ③ $\frac{3}{1225}$
④ $\frac{3}{1250}$ ⑤ $\frac{9}{2500}$

05

두 사람이 흰 공 4개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 한 번에 한 개씩 번갈아 가며 뽑아서 흰 공이 먼저 나온 사람이 이기는 것으로 할 때, 먼저 꺼낸 사람이 이길 확률은?

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{20}{21}$
④ $\frac{32}{63}$ ⑤ $\frac{40}{63}$

06

한 개의 주사위를 두 번 던져서 처음에 나오는 눈의 수를 a, 나중에 나오는 눈의 수를 b라고 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{17}{36}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

07

두 개의 주사위 A, B를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$에 대하여 역행렬 A^{-1}가 존재하지 않을 확률은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

08

두 사건 A, B는 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=0.4$일 때, $\mathrm{P}(B)$를 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

09

명중률이 75 %인 사수가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 1 또는 2의 눈이 나오면 두 번 쏘고, 그 이외의 눈이 나오면 세 번을 쏘기로 한다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 이에 따라 목표물을 쏠 때, 오직 한 번만 명중할 확률은?

① $\frac{7}{32}$ ② $\frac{9}{32}$ ③ $\frac{11}{32}$
④ $\frac{13}{32}$ ⑤ $\frac{15}{32}$

10

A, B, C 세 사람이 주사위 던지기 놀이를 하는데 3의 배수의 눈이 나오면 이기는 것으로 한다. A부터 시작하여 A, B, C, A, B, C, …의 순으로 승부가 날 때까지 계속한다고 할 때, B가 이길 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{6}{19}$ ③ $\frac{13}{19}$
④ $\frac{16}{19}$ ⑤ 1

11

프로야구의 결승전은 7번 경기를 하여 먼저 4번을 이기는 팀이 우승을 한다. 두 팀 A, B가 프로야구의 결승전에서 만났고, A 팀의 승률이 $\frac{3}{5}$일 때, 5차전에서 승부가 가려질 확률은?

(단, 비기는 경우는 없다.)

① $\frac{192}{3125}$ ② $\frac{168}{625}$ ③ $\frac{32}{125}$

④ $\frac{1024}{3125}$ ⑤ $\frac{314}{625}$

12

흰 공 3개와 빨간 공 5개가 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 차례로 꺼낸다고 한다. 두 번째 뽑은 공이 흰 공일 때, 첫 번째 뽑은 공도 흰 공일 확률은? (단, 뽑은 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{7}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

13

비가 온 날의 다음 날에 비가 올 확률은 $\frac{3}{5}$이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률은 $\frac{1}{3}$이라고 한다. 어느 수요일에 비가 왔을 때, 같은 주 토요일에 비가 올 확률은?

① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{27}{125}$ ③ $\frac{47}{125}$

④ $\frac{523}{1125}$ ⑤ $\frac{623}{1125}$

14

A 상자에는 흰 공 2개와 검은 공 3개, B 상자에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있다. 한 개의 상자를 임의로 선택하여 한 개의 공을 꺼내었더니 그것이 흰 공이었을 때, 택한 상자가 A 상자일 확률은?

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{29}{70}$ ③ $\frac{5}{29}$

④ $\frac{8}{29}$ ⑤ $\frac{14}{29}$

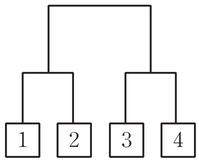
15 UP!!

10개의 주사위를 동시에 던져서 1의 눈이 나온 개수만큼 동전을 던질 때, 적어도 한 개가 앞면이 나올 확률은?

① $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{11}{12}\right)^{10}$ ③ $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$
④ $1-\left(\frac{11}{12}\right)^{10}$ ⑤ $1-\left(\frac{11}{12}\right)^{11}$

16 UP!!

A, B, C, D 4명이 그림과 같은 대진표에 따라 경기를 한다. 이들은 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 한 개씩 적힌 카드가 들어 있는 주머니에서 카드를 임의로 하나씩 꺼내어 나온 번호에 위치한다. A가 C, D와 경기할 때 이길 확률이 모두 $\frac{2}{3}$이고, B가 C, D와 경기할 때 이길 확률이 모두 $\frac{1}{2}$이라고 할 때, A와 B가 결승에서 만날 확률은?



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

17 서술형

한 개의 주사위를 10번 던져서 n번째 나오는 눈의 수가 짝수이면 $X_n=2$, 홀수이면 $X_n=-1$의 값을 주도록 한다. 이때,

$$X_1+X_2+\cdots+X_{10}=2$$

일 확률을 구하여라.

18 서술형

사건 A가 일어날 확률은 $\frac{3}{4}$, 사건 B가 일어날 확률은 $\frac{2}{3}$라고 할 때, 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 범위를 구하여라.

19 서술형

두 선수 A, B의 명중률이 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$이다. 두 선수 A, B가 같은 표적을 향해 사격을 했을 때, 한 사람만 명중시킬 확률을 구하여라.

III 확률

중단원 평가 문제

▶ 1. 확률의 뜻과 활용 / P_136

01 8개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$8!$가지
홀수 번째 자리 4개 중 3개를 택하여 모음 i, a, e를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3$가지이고, 나머지 5개의 자리에 자음 t, r, n, g, l을 배열하는 경우의 수는 $5!$가지이므로 모음이 홀수 번째 자리에 오게 되는 경우의 수는
${}_4P_3\times5!$ (가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{{}_4P_3\times5!}{8!}=\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}=\dfrac{1}{14}$

답 ③

02 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$(가지)
(1) 남학생 2명이 양쪽 끝에 서는 경우의 수는 $2!=2$(가지)이고, 이들 각각에 대하여 여학생 2명이 서는 경우의 수도 $2!=2$(가지)이다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2\times2}{24}=\dfrac{1}{6}$
(2) 여학생과 남학생이 번갈아 가며 서는 경우는 여남여남의 순서로 서는 경우 또는 남여남여의 순서로 서는 경우이다.
여남여남의 순서로 서는 경우의 수는
$2!\times2!=4$(가지)
남여남여의 순서로 서는 경우의 수도
$2!\times2!=4$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4+4}{24}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$
(3) 여학생 2명을 하나로 묶어서 생각하면 3명을 일렬로 세우는 경우이므로 그 경우의 수는 $3!=6$(가지)
또, 이 경우 각각에 대하여 여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$(가지)
그러므로 여자끼리 이웃하여 서는 경우의 수는 $6\times2=12$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

03 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)
1에서 5까지 적힌 공 중에서 2개를 꺼내고 6이 적힌 공을 꺼내면 나온 번호의 최댓값이 6이 된다.
그러므로 나온 번호의 최댓값이 6인 경우의 수는
${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$

답 ②

04 동전 12개에서 6개의 동전을 꺼내는 경우의 수는
${}_{12}C_6=924$(가지)
이 중에서 금액의 합이 500원 이상인 경우는 다음과 같다.
(i) 100원짜리 동전 4개, 50원짜리 동전 2개를 꺼내는 경우 ${}_6C_4\cdot{}_4C_2=90$ (가지)
(ii) 100원짜리 동전 5개를 꺼내고, 10원짜리 동전과 50원짜리 동전 중에서 1개를 꺼내는 경우 ${}_6C_5\cdot{}_6C_1=36$ (가지)
(iii) 100원짜리 동전 6개를 꺼내는 경우
${}_6C_6=1$ (가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{90+36+1}{924}=\dfrac{127}{924}$

답 $\dfrac{127}{924}$

05 구하는 안타의 개수를 x개라고 하면 타율이 0.295이므로

$\frac{x}{200}=0.295$ $\therefore x=59$

따라서 이 선수가 이번 시즌에 200타석에서 칠 수 있는 안타의 개수는 59개로 추측할 수 있다.

답 59개

06 주머니 속에서 한 개의 공을 꺼낼 때 그 공이 흰 공일 확률은

$\frac{3}{3+4+n}=\frac{3}{7+n}$ ……㉠

1000번의 시행에서 흰 공이 250번 나왔으므로 통계적 확률은

$\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$ ……㉡

㉠=㉡이므로 $\frac{3}{7+n}=\frac{1}{4}$

$7+n=12$ $\therefore n=5$

답 ⑤

07 흰 공 3개에서 2개의 공을 꺼내는 것이므로 꺼낸 두 공의 색은 흰 색이다.

(1) 꺼낸 두 공의 색이 같은 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

(2) 꺼낸 두 공의 색이 다른 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

답 (1) 1 (2) 0

08 사건 A와 서로 배반인 사건은 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 서로 배반인 사건은 B^C의 부분집합이므로, 두 사건 A, B 모두와 서로 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

$A^C=\{1,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로 $A^C\cap B^C=\{1,\ 5\}$

따라서 두 사건 A, B 모두와 서로 배반인 사건의 개수는 $2^2=4$(개)

답 4개

09 (1) 1부터 300까지의 자연수 중에서 3의 배수가 나오는 경우는 3, 6, 9, …, 297, 300

즉, 3×1, 3×2, …, 3×99, 3×100으로 100가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$

(2) 1부터 300까지의 자연수 중에서 4의 배수가 나오는 경우는 4, 8, 12, …, 296, 300

즉, 4×1, 4×2, …, 4×74, 4×75로 75가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{75}{300}=\frac{1}{4}$

(3) 3의 배수가 나오는 사건을 A, 4의 배수가 나오는 사건을 B라고 하면 $A\cap B$는 3의 배수이면서 4의 배수, 즉 3과 4의 최소공배수인 12의 배수가 나오는 사건이다.

$A\cap B=\{12,\ 24,\ \cdots,\ 288,\ 300\}$에서

$n(A\cap B)=25$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{25}{300}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$

10 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

(1) (i) 두 눈의 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이므로 그 확률은

$\frac{5}{36}$

(ii) 두 눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지이므로 그 확률은

$\frac{5}{36}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

(2) (ⅰ) 두 눈의 수의 합이 3 이하인 경우는

$(1, 1), (1, 2), (2, 1)$

의 3가지이므로 그 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 11 이상인 경우는

$(5, 6), (6, 5), (6, 6)$

의 3가지이므로 그 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

답 (1) $\frac{5}{18}$ (2) $\frac{1}{6}$

11 (1) 10개의 제비 중에서 당첨 제비가 3개 들어 있으므로 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$

(2) 갑이 당첨 제비를 뽑으면 을은 남아 있는 당첨 제비 2개 중 하나를 뽑아야 한다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

(3) 갑은 당첨 제비가 아닌 7개 중 하나를 뽑고, 을은 당첨 제비 3개 중 하나를 뽑아야 한다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$

(4) 을이 당첨되는 경우는 (2) 또는 (3)의 경우이고 (2), (3)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$

답 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{1}{15}$ (3) $\frac{7}{30}$ (4) $\frac{3}{10}$

12 세 사람이 가위바위보를 할 때, 나오는 모든 경우의 수는

$3\times3\times3=27$(가지)

세 사람이 비기는 경우는 세 사람이 모두 같은 것을 내는 경우 또는 세 사람이 모두 다른 것을 내는 경우이다.

(ⅰ) 세 사람이 모두 같은 것을 내는 경우는

(가위, 가위, 가위), (바위, 바위, 바위), (보, 보, 보)

의 3가지이므로 그 확률은 $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

(ⅱ) 세 사람이 모두 다른 것을 내는 경우는

(가위, 바위, 보), (가위, 보, 바위), (바위, 가위, 보), (바위, 보, 가위), (보, 가위, 바위), (보, 바위, 가위)

의 6가지이므로 그 확률은

$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

답 ④

13 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

답 ③

14 (1) 두 공의 색이 같은 경우는 두 공이 모두 검은 공인 경우 또는 두 공이 모두 흰 공인 경우이다.

(ⅰ) 두 공이 모두 검은 공일 확률은

$\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{64}$

(ⅱ) 두 공이 모두 흰 공일 확률은

$\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{25}{64}+\frac{9}{64}=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$

(2) 두 공의 색이 다른 사건은 (1)의 여사건이므로 구하는 확률은

$1-\frac{17}{32}=\frac{15}{32}$

답 (1) $\frac{17}{32}$ (2) $\frac{15}{32}$

15 적어도 한쪽 끝에 여학생이 서는 사건을 A라고 하자.
이때, A^C은 여학생이 양쪽 끝에 서지 않는 사건, 즉 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 사건이므로 그 확률은

$$P(A^C)=\frac{{}_3P_2\times 3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

답 ③

16 10개의 구슬 중 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_2$가지
적어도 1개가 노란 구슬인 사건을 A라고 하면 A^C은 노란 구슬이 1개도 꺼내지지 않은 사건, 즉 2개 모두 흰 구슬인 사건이다. 이때, 노란 구슬의 개수를 n개라고 하면 A^C의 경우의 수는 ${}_{10-n}C_2$가지이므로

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{{}_{10-n}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15}$$

$${}_{10-n}C_2=\frac{7}{15}\times{}_{10}C_2$$

$$\frac{(10-n)(9-n)}{2}=21$$

$$(10-n)(9-n)=42=7\times 6$$

$10-n=7$ $\therefore n=3$
따라서 노란 구슬의 개수는 3개이다.

답 ①

|다른 풀이|
흰 구슬의 개수를 n개라고 하면

$$1-\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15},\ \frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{n(n-1)}{10\cdot 9}=\frac{7}{15},\ n(n-1)=7\times 6$$

$\therefore n=7$
따라서 흰 구슬이 7개이므로 노란 구슬의 개수는
$10-7=3$(개)

▶ 2. 조건부확률 / P_150

01 $P(A)=0.6$, $P(A\cap B)=0.35$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.35}{0.6}=\frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

02 정답을 맞히는 사건을 A, 정답을 알고 있는 사건을 B라고 하자.
정답을 알 때는 그 답을 정확히 쓰므로 정답을 맞힐 확률은 1이다. 그러므로 정답을 알고 맞힐 확률은 $P(A\cap B)=\frac{3}{4}\times 1$
정답을 모를 때는 아무 답이나 쓰므로 정답을 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이다. 그러므로 정답을 모르고 맞힐 확률은 $P(A\cap B^C)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$

$$\therefore P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$
$$=\frac{3}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

따라서 정답을 맞혔을 때, 실제로 정답을 알고 맞혔을 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}=\frac{15}{16}$$

답 $\frac{15}{16}$

03 첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A라고 하면
$P(A)=\frac{3}{5}$
두 번째에 푸른 공이 나오는 사건을 B라고 하면 첫 번째에 흰 공이 나왔을 때, 두 번째에 푸른 공이 나올 확률은(흰 공을 하나 꺼냈으므로 흰 공 2개, 푸른 공 2개가 남아 있다.)

$$P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

04 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}=\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}$

한편

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$이므로

$\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}=\mathrm{P}(B)\cdot\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$

답 $\frac{4}{9}$

05 $A\cap B=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 종속

06 상자 중 사은품이 들어 있을 확률은 $\frac{1}{5}$이고, 들어 있지 않을 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

사은품이 3개 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1$

사은품이 4개 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0$

따라서 임의로 상자 4개를 꺼냈을 때, 사은품이 들어 있는 상자가 적어도 3개 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0$

$=\frac{16}{625}+\frac{1}{625}=\frac{17}{625}$

답 $\frac{17}{625}$

07 자유투의 성공률이 $\frac{2}{3}$이므로 성공하지 못 할 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

0번 성공할 확률은

${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

1번 성공할 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$

2번 성공할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27}$

3번 성공할 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$

따라서 2번 성공할 확률이 가장 크다.

답 2번

08 6발 중 평균 3발을 명중시키므로, 이 사수가 한 발을 쏘았을 때 명중시킬 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 명중시키지 못할 확률도 $\frac{1}{2}$이다.

n발 중 1발도 명중시키지 못할 확률은

${}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

그러므로 적어도 1발을 명중시킬 확률은

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이 확률이 0.999보다 커야하므로

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n>0.999$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.001$

$2^n>1000$

$2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n\geq 10$

따라서 최소한 10발을 쏘아야 한다.

답 ⑤

대단원 평가 문제

p.152~155

01 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=0.3+0.2-0.4=0.1$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{0.1}{0.3}=\dfrac{1}{3}$

답 ④

02 9장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_2$(가지)

두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 수의 곱이 짝수가 아닌 사건, 즉 두 수의 곱이 홀수인 사건이다.

두 수의 곱이 홀수인 경우는 (홀수)×(홀수)일 때이므로 그 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{18}$

따라서 2장을 뽑을 때, 두 수의 곱이 짝수일 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\dfrac{5}{18}=\dfrac{13}{18}$

답 ⑤

03 2명 모두 남학생인 사건을 A라고 하면 그 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{15}$

2명 모두 여학생인 사건을 B라고 하면 그 확률은

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{15}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{15}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{7}{15}$

답 ③

04 첫 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 A라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{50}$

두 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 B라고 하면, 첫 번째에 불량품을 꺼냈을 때, 두 번째도 불량품을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{49}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{3}{50}\times\dfrac{2}{49}=\dfrac{3}{1225}$

답 ③

05 흰 공이 나오는 사건을 A, 검은 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, 먼저 꺼낸 사람이 흰 공을 뽑는 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) A: $\dfrac{4}{9}$

(ii) BBA: $\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{10}{63}$

(iii) $BBBBA$: $\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{63}$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{4}{9}+\dfrac{10}{63}+\dfrac{2}{63}=\dfrac{40}{63}$

답 ⑤

06 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $a^2-4b>0$이므로

(i) $a=1$, 2일 때, $a^2>4b$인 b는 없다.

(ii) $a=3$일 때, $b=1$, 2의 2가지

(iii) $a=4$일 때, $b=1$, 2, 3의 3가지

(iv) $a=5$일 때, $b=1$, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지

(v) $a=6$일 때, $b=1$, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지

그러므로 구하는 확률은

$\dfrac{2+3+6+6}{36}=\dfrac{17}{36}$

답 ④

07 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

이때, 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 조건은

$2b-3a=0 \qquad \therefore 3a=2b$

이 식을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 3)$, $(4, 6)$의 2가지이다.

따라서 역행렬 A^{-1}가 존재하지 않을 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

답 ①

08 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$에서

$0.4=0.6\times\mathrm{P}(B^C) \qquad \therefore \mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$

답 ①

09 한 개의 주사위를 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

또 명중률이 75 %이므로 한 번 쐈을 때, 명중할 확률은 $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$이고, 명중하지 않을 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

그러므로 두 번을 쐈을 때, 한 번만 명중할 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1$

세 번을 쐈을 때, 한 번만 명중할 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{3}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1+\frac{2}{3}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{32}=\frac{7}{32}$

답 ①

10 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

B가 이기기 위해서는 3의 배수의 눈이 2번째 또는 5번째 또는 8번째, …일 때만 나와야 한다.

2번째에 B가 이길 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$

5번째에 B가 이길 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}$

8번째에 B가 이길 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^7\frac{1}{3}$

$\vdots$

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^7\frac{1}{3}+\cdots$

$=\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{6}{19}$

답 ②

11 (i) A 팀이 우승하는 경우

4차전까지 A 팀이 3번, B 팀이 1번 이기고 5차전에서 A 팀이 이기면 되므로 그 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}$

(ii) B 팀이 우승하는 경우

4차전까지 A 팀이 1번, B 팀이 3번 이기고 5차전에서 B 팀이 이기면 되므로 그 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}$

따라서 5차전에서 승부가 가려질 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}$

$=\frac{648}{3125}+\frac{192}{3125}=\frac{840}{3125}=\frac{168}{625}$

답 ②

12 첫 번째 뽑은 공이 흰 공일 사건을 A, 두 번째 뽑은 공이 흰 공일 사건을 B라고 하자.

(i) 첫 번째 뽑은 공이 흰 공이고, 두 번째 뽑은 공도 흰 공일 확률은

$$P(A\cap B)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$$

(ii) 첫 번째 뽑은 공이 빨간 공이고, 두 번째 뽑은 공은 흰 공일 확률은

$$P(A^C\cap B)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$$

(i), (ii)에 의하여 두 번째 뽑은 공이 흰 공일 확률은

$$P(B)=\frac{6}{56}+\frac{15}{56}=\frac{21}{56}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{56}}{\frac{21}{56}}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

답 ③

13 비가 오는 경우를 ○, 오지 않는 경우를 ×라고 하면 토요일에 비가 오는 경우와 그 확률은 다음 표와 같다.

수	목	금	토	확률
○	○	○	○	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{125}$
○	○	×	○	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{25}$
○	×	○	○	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{25}$
○	×	×	○	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{45}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{27}{125}+\frac{2}{25}+\frac{2}{25}+\frac{4}{45}=\frac{523}{1125}$$

답 ④

14 상자 A, B가 선택될 사건을 각각 A, B라 하고, 흰 공이 나올 사건을 W라고 하자.

(i) A 상자가 선택되고, 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

(ii) B 상자가 선택되고, 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(B\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3C_1}{{}_7C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$$

(i), (ii)에 의하여 흰 공이 나올 확률은

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{3}{14}=\frac{29}{70}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|W)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{29}{70}}=\frac{14}{29}$$

답 ⑤

15 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 10개의 주사위를 동시에 던져서 1의 눈이 k개 나올 확률은

$${}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

k개의 동전을 던질 때 모두 뒷면이 나올 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$이므로 k개의 동전을 던질 때 적어도 한 개가 앞면이 나올 확률은

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

그러므로 10개의 주사위를 동시에 던져서 1의 눈이 k개 나오고, k개의 동전을 던져서 적어도 한 개가 앞면이 나올 확률은

$${}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

(단, $k=0, 1, 2, \cdots, 10$)

따라서 구하는 확률은

$$\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}-\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{1}{12}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$
$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^{10}-\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{6}\right)^{10}=1-\left(\frac{11}{12}\right)^{10}$$

답 ④

16 대진표를 짜는 전체 경우의 수는

$4!$가지

(i) A와 B가 첫 번째 경기에서 만나지 않는 경우

A가 카드를 선택할 수 있는 경우의 수는 4가지이고 그 각각에 대하여 B가 2가지 경우가 있다.

(예를 들어 A가 1을 선택하면 B는 3 또는 4를 선택할 수 밖에 없다.)

그리고 나머지 2명이 카드를 선택하는 경우의 수는 $2!$가지이다.

그러므로 A와 B가 첫 번째 경기에서 만나지 않을 확률은

$$\frac{4\times2\times2!}{4!}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

(ii) A와 B 모두 결승에 진출하는 경우

A가 C, D와 경기할 때 이길 확률은 모두 $\frac{2}{3}$이고, B가 C, D와 경기할 때 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로 A, B 모두 결승에 진출할 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

따라서 A와 B가 결승에서 만날 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

답 ①

17 1단계 짝수와 홀수가 나오는 횟수를 구한다.

짝수가 나오는 횟수를 a, 홀수가 나오는 횟수를 b라고 하면

$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{10}=2$

에서 $X_i\,(1\le i\le10)$의 값은 2 또는 -1이므로

$2a-b=2,\ a+b=10$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=6$

그러므로 10번을 던져서 짝수의 눈이 4번, 홀수의 눈이 6번 나와야 한다.

2단계 $X_1+X_2+\cdots+X_{10}=2$일 확률을 구한다.

이 시행은 독립시행이고 각 시행에서 짝수, 홀수의 눈이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은 $\quad {}_{10}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{210}{2^{10}}=\frac{105}{512}$

답 $\frac{105}{512}$

18 1단계 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구한다.

두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=\frac{17}{12}-\mathrm{P}(A\cup B)\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

2단계 $\mathrm{P}(A\cup B)$의 범위를 구한다.

$\mathrm{P}(A\cup B)\le1$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(B)$이므로

$\frac{3}{4}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1 \quad\cdots\cdots㉡$

3단계 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 범위를 구한다.

㉠, ㉡에 의하여 $\quad \frac{5}{12}\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{2}{3}$

답 $\frac{5}{12}\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{2}{3}$

19 1단계 둘 중 한 사람만 명중시키는 사건을 나타낸다.

두 선수 A, B가 표적을 명중시키는 사건을 각각 A, B라고 하면 A는 명중시키고 B는 명중시키지 못하는 사건은 $\quad A\cap B^C$

A는 명중시키지 못하고 B는 명중시키는 사건은 $\quad A^C\cap B$

2단계 둘 중 한 사람만 명중시킬 확률을 구한다.

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

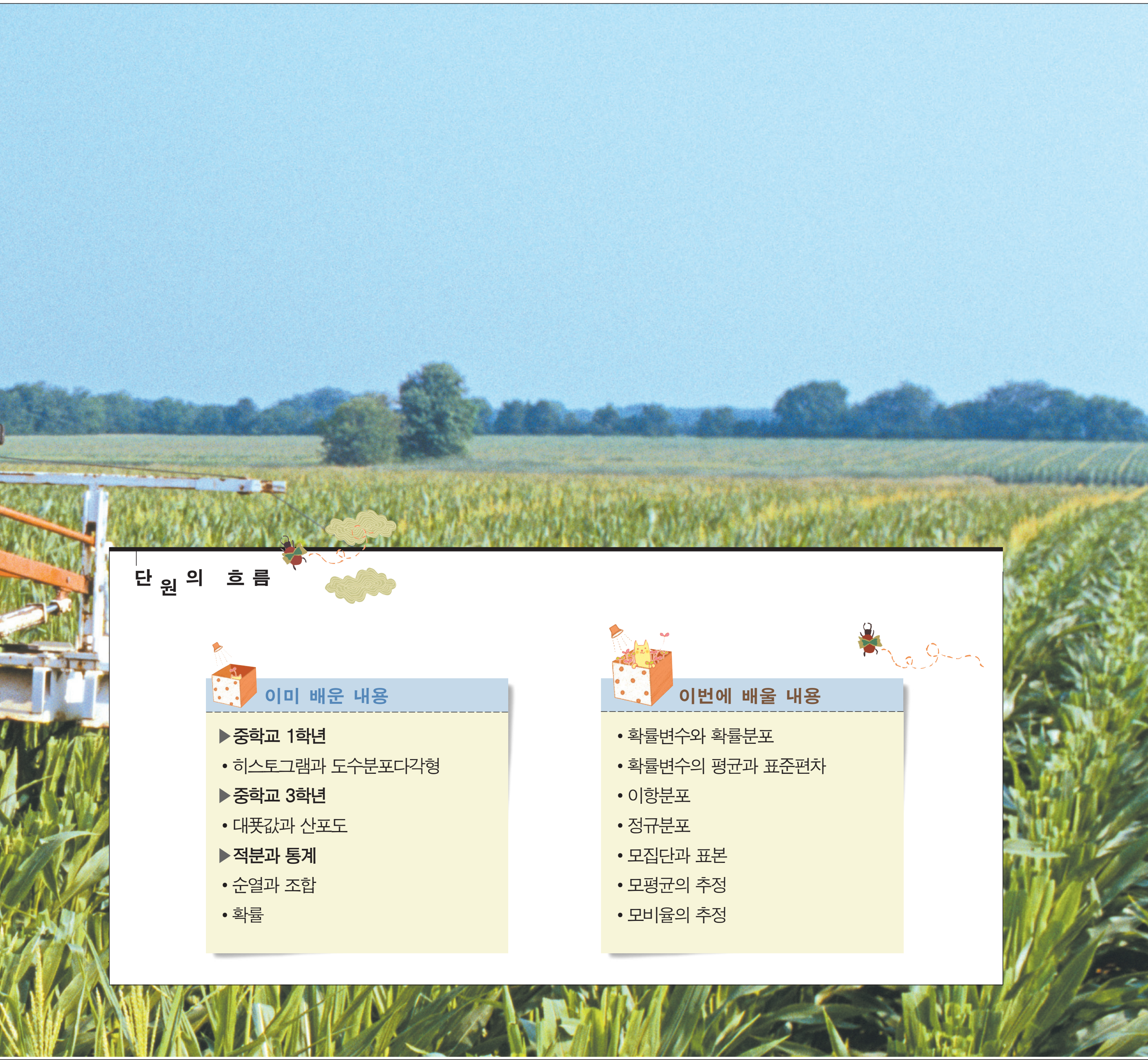
$$\begin{aligned}&\mathrm{P}((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B))\\&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

IV 통계

1 확률분포　　2 통계적 추정

우리는 미국, 일본, 중국의 기후는 물론이고 우리나라와 지구 반대편에 있는 브라질의 기후도 우리 경제에 커다란 영향을 끼치는 시대에 살고 있다. 다양한 사회 현상과 복잡한 자연 현상을 규명하여 행복한 삶을 유지하기 위해서는 우연히 일어나는 작은 사건에도 주목하여야 하고, 우연한 현상 속에서 규칙성을 찾을 수 있는 통계적 추론 능력을 갖추어야 한다.



단원의 흐름

이미 배운 내용

▶ **중학교 1학년**
- 히스토그램과 도수분포다각형

▶ **중학교 3학년**
- 대푯값과 산포도

▶ **적분과 통계**
- 순열과 조합
- 확률

이번에 배울 내용

- 확률변수와 확률분포
- 확률변수의 평균과 표준편차
- 이항분포
- 정규분포
- 모집단과 표본
- 모평균의 추정
- 모비율의 추정

이 단원의 학습 목표

1. 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해한다.
2. 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해한다.
3. 이항분포의 뜻을 알고, 그 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
4. 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.
5. 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.
6. 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
7. 표본비율과 모비율의 관계를 이해한다.
8. 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

122

단원을 시작하기 전에 …

확률 **1** 한 개의 동전을 세 번 던질 때, 앞면이 두 번 나올 확률을 구하여라.

확률의 기본 성질 **2** 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.
(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\square \le \mathrm{P}(A) \le \square$이다.
(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\square$이다.
(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=\square$이다.

합의 기호 Σ **3** 다음을 $\sum$를 써서 나타내어라.
(1) $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$
(2) $(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$

평균, 표준편차 **4** 어느 학생이 5번 치른 수학 시험 점수가 다음과 같다. 수학 시험 점수의 평균과 표준편차를 구하여라.

85, 81, 88, 89, 82

이항정리 **5** 다음 식의 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하여라.
(1) $(a+b)^4$ $[a^3b]$ (2) $(2a+3b)^5$ $[a^3b^2]$

단원을 시작하기 전에 ········ 풀이

1 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 뒷면이 나올 확률도 $\frac{1}{2}$이다.
따라서 세 번의 시행에서 앞면이 두 번 나올 확률은
$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

2 (1) $\boxed{\mathbf{0}} \le \mathrm{P}(A) \le \boxed{\mathbf{1}}$
(2) $\mathrm{P}(S)=\boxed{\mathbf{1}}$
(3) $\mathrm{P}(\varnothing)=\boxed{\mathbf{0}}$

3 (1) $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}$
(2) $(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$
$=\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i}$

4 평균 : $(85+81+88+89+82)\div5$
$=425\div5=\mathbf{85}$

분산 : $\{(85-85)^2+(81-85)^2+(88-85)^2+(89-85)^2+(82-85)^2\}\div5$
$=50\div5=10$

표준편차 : $\boldsymbol{\sqrt{10}}$

5 (1) $(a+b)^4$의 전개식에서 일반항은
${}_4\mathrm{C}_ra^rb^{4-r}$
$r=3$일 때, ${}_4\mathrm{C}_3a^3b=4a^3b$이므로 a^3b의 계수는 **4**이다.
(2) $(2a+3b)^5$의 전개식에서 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(2a)^r(3b)^{5-r}$
$r=3$일 때, ${}_5\mathrm{C}_3(2a)^3(3b)^2=720a^3b^2$이므로 a^3b^2의 계수는 **720**이다.

1 확률분포

이 단원을 배우면

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 알 수 있다.
- 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해할 수 있다.
- 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해할 수 있다.
- 확률변수의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
2. 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해한다.
3. 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

확률변수, 이산확률변수, $\mathrm{P}(X=x)$, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수

124

1 확률변수와 확률분포

학습 목표

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
- 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해한다.
- 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / **로또 1등 당첨 확률**

로또(lotto)는 1971년 6월 미국의 뉴저지 주에서 시작되어 전 세계에 퍼졌다. 우리나라에는 2002년 12월에 처음으로 로또가 발매되었으며, 그 방식은 45개의 수 중에서 6개를 맞히면 1등이 되는 6/45이다.

로또에서 번호 4개, 5개가 일치할 확률은 각각 $\frac{11115}{8145060}$, $\frac{234}{8145060}$이다.

다가서기 / 해설

우리나라에서 판매하는 로또(Lotto)는 2002년 12월부터 시작하였다. 그 형식은 6/45이고, 이것은 45개의 수 중 6개를 구매자가 직접 선택하고 추첨을 통해 당첨 번호와 선택한 번호가 일치하는 개수에 따라 순위를 결정한다는 뜻이다.

로또는 1971년 6월 미국의 뉴저지 주에서 시작되어 1980년대 이후 유럽과 아시아에서도 인기를 누리고 있다.

로또의 형식에는 49개의 수 중 6개를 맞히면 1등이 되는 6/49, 54개의 수 중 6개를 맞히면 1등이 되는 6/54, 40개의 수 중 4개를 맞히면 1등이 되는 4/40, 69개의 수 중 7개를 맞히면 1등이 되는 7/69 등이 있다.

6/45에서 번호를 선택하는 전체 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_{45}C_6=\frac{45\times44\times43\times42\times41\times40}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=8145060(\text{가지})$$

이때, 1등, 2등, 3등, 4등이 될 확률을 구하여 보자.

(i) 번호 6개가 일치하는 경우의 수는

${}_6C_6=1$(가지)

따라서 1등이 될 확률은 $\frac{1}{8145060}$

(ii) 번호 5개가 일치하고 보너스 번호 1개가 일치하는 경우의 수는

${}_6C_5\times{}_1C_1=6$(가지)

따라서 2등이 될 확률은 $\frac{6}{8145060}=\frac{1}{1357510}$

(iii) 번호 5개가 일치하고 나머지 번호는 보너스 번호와 다른 경우의 수는

${}_6C_5\times{}_{38}C_1=228$(가지)

따라서 3등이 될 확률은 $\frac{228}{8145060}\fallingdotseq\frac{1}{35724}$

(iv) 번호 4개가 일치하는 경우의 수는

${}_6C_4\times{}_{39}C_2=11115$(가지)

따라서 4등이 될 확률은 $\frac{11115}{8145060}\fallingdotseq\frac{1}{733}$

01 확률변수의 뜻

탐 구 하 기 / 동전을 세 번 던질 때, 앞, 뒷면 조사하기

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내자. 표본공간을 S라고 할 때, 다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$S=\{$TTT, TTH, THT, HTT, ☐, ☐, ☐, ☐$\}$

알 아 보 기 / 확률변수의 뜻을 알아보자.

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 X라고 하면 표본공간 S의 각 원소

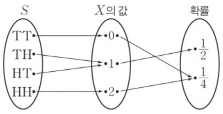
TT, TH, HT, HH

에 대응하는 X의 값은 각각 다음과 같다.

0, 1, 1, 2

$X=0 \iff \{\mathrm{TT}\}$
$X=1 \iff \{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$
$X=2 \iff \{\mathrm{HH}\}$

즉, X는 0, 1, 2 중에서 한 값을 가지는 변수이고, X의 각 값에 대응하는 확률은 오른쪽 그림과 같다.



이와 같이 어떤 시행의 결과에 따라 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시켜 주는 것을 **확률변수**라고 한다.

확률변수를 생각함으로써 표본공간을 수량화할 수 있다.

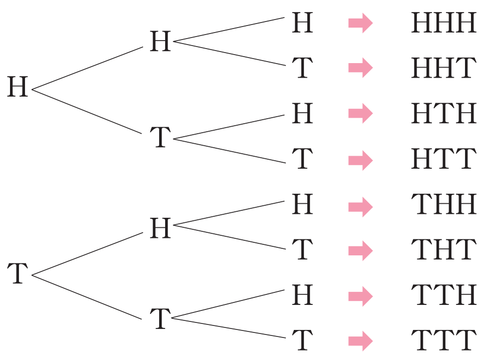
| **참고** | 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이다. 그러나 변수의 역할을 하므로 확률변수라고 부른다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X가 가지는 값을 구하여라.

탐구하기 / 풀이

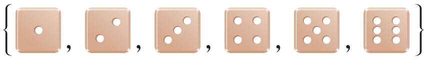
한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 나올 수 있는 모든 경우를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore S=\{$TTT, TTH, THT, HTT, $\boxed{\mathrm{THH}}$, $\boxed{\mathrm{HTH}}$, $\boxed{\mathrm{HHT}}$, $\boxed{\mathrm{HHH}}\}$

알아보기 / 해설

• 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 위에 나오는 면을 관찰하면 표본공간은

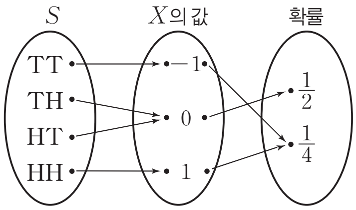


또 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간은

$\{$TT, TH, HT, HH$\}$

이처럼 표본공간이 그림이나 문자로 주어지면 확률의 계산을 할 때, 불편하므로 표본공간을 수량화할 필요가 있다.

• 어떤 표본공간 위에서 정의되는 확률변수는 본문의 내용 외에도 여러 가지가 있다. 예를 들어 (앞면이 나오는 횟수)-1을 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값과 X의 각 값에 대응하는 확률은 다음 그림과 같다.



스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간 S는

$S=\{$TTTT, TTTH, TTHT, THTT, HTTT, TTHH, THHT, HHTT, THTH, HTHT, HTTH, THHH, HTHH, HHTH, HHHT, HHHH$\}$

이때, 확률변수 X는 앞면이 나오는 횟수이므로 X가 가지는 값은 **0, 1, 2, 3, 4**이다.

알아보기 / 해설

- 중학교 때 배운 도수분포와 이 단원에서 배우는 확률분포를 연결지어 생각하면 편리하다.

도수분포		확률분포
계급값	⟷	확률변수
상대도수	⟷	확률
상대도수의 분포표	⟷	확률분포표

(첫 행 '도수분포 ⟷ 확률분포'는 표의 머리 행이다.)

- 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x_i)=p_i$$

(단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

일 때, 모든 i에 대하여 p_i는 0 이상이고 1 이하이다. 또

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

즉, 확률분포에서 각 확률의 합은 항상 1이다.

- $P(X=x_i$ 또는 $X=x_j)$
$=P(X=x_i)+P(X=x_j)$
$=p_i+p_j$ (단, $i\neq j$)

보충 학습

교과서에서는 X가 가지는 값이 유한집합인 것만을 이산확률변수로 취급하였으나, X가 가지는 값이 가산집합(자연수 전체의 집합과 일대일 대응이 되는 집합)인 경우에도 이산확률변수이다.

예를 들어 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 처음 나올 때까지 던진 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$와 같이 자연수 전체의 집합과 같아진다.

126

02 이산확률변수와 확률질량함수

알 아 보 기 / 이산확률변수와 확률질량함수를 알아보자.

확률변수는 보통 대문자 $X,\ Y,\ Z,\ \cdots$로 나타내고, 확률변수가 가지는 값은 소문자 $x,\ y,\ z,\ \cdots$ 또는 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$으로 나타낸다.

확률변수 X가 유한개의 값 또는 자연수와 같이 셀 수 있는 값을 가질 때, X를 **이산확률변수**라 하고, X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로

$$P(X=x)$$

와 같이 나타낸다.

이때, 확률 $P(X=x)$는 x의 값에 따라 달라지는 함수가 되며, 이것을 **확률질량함수**라고 한다.

또 이산확률변수 X가 가지는 값과 그 값을 가질 확률과의 대응 관계를 X의 **확률분포**라고 한다.

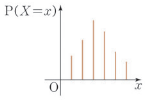
이산확률변수 X는 무한개의 값을 가질 때도 있지만 여기에서는 유한개의 값을 가지는 경우만 다루기로 한다.

확률분포를 식으로 나타내면

$$P(X=x_i)=p_i\ (\text{단, } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

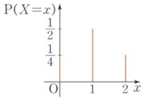
이고, 표로 나타내면 다음과 같다. 또한 확률분포를 그래프로도 나타낼 수 있으며, 이때 보통 선 그래프를 사용한다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1



| 보기 | 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



일반적으로 확률질량함수에 대하여 다음이 성립한다.

확률질량함수의 성질

(1) $P(X=x_i)=p_i\geq 0$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

(3) $P(x_i\leq X\leq x_j)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, $i\leq j$이다.)

함께하기 / 해설

1 (1) 확률변수의 확률분포를 식으로 나타낼 수도 있다.

이 문제에서 주어진 확률변수 X를 식으로 나타내면

$$P(X=x)=\frac{{}_5C_{3-x}\times{}_3C_x}{{}_8C_3}$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

함 께 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 남학생 5명과 여학생 3명으로 구성되어 있는 어떤 수학 경시 팀에서 임의로 3명의 대표를 선발할 때, 선발되는 여학생의 수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 여학생이 2명 이상 선발될 확률을 구하여라.

풀이

(1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_3\times{}_3C_0}{{}_8C_3}=\frac{5}{28}$$

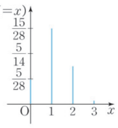
$$P(X=1)=\frac{{}_5C_2\times{}_3C_1}{{}_8C_3}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_1\times{}_3C_2}{{}_8C_3}=\frac{15}{56}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_5C_0\times{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

따라서 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1



(2) 여학생이 2명 이상 선발되는 것은 $X\geq 2$인 경우이므로 그 확률은

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\frac{2}{7}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 눈의 수의 합이 5 이상 7 이하가 될 확률을 구하여라.

(3) 눈의 수의 합이 3 이상이 될 확률을 구하여라.

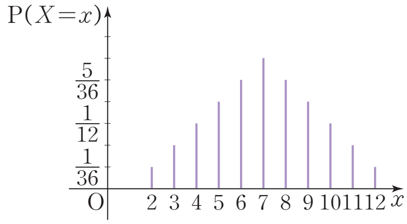
스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합을 표로 만들면 다음과 같다.

두 번째 \ 첫 번째	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(1) 확률변수 X가 가지는 값은 2, 3, 4, ⋯, 11, 12이므로 그 각각의 확률을 구하여 X의 확률분포를 표와 그래프로 각각 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
X	8	9	10	11	12	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1



(2) 나오는 눈의 수의 합이 5 이상 7 이하인 것은 $5\leq X\leq 7$인 경우이므로 그 확률은

$$P(5\leq X\leq 7)$$
$$=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{15}{36}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

(3) 나오는 눈의 수의 합이 3 이상인 것은 $X\geq 3$인 경우이므로 그 확률은

$$P(X\geq 3)=1-P(X=2)$$
$$=1-\frac{1}{36}=\mathbf{\frac{35}{36}}$$

| 다른 풀이 |

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+\cdots+P(X=11)+P(X=12)$$
$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$$
$$=\frac{35}{36}$$

탐구하기 / 풀이

1. 도수분포표에서 상대도수는 다음과 같이 계산한다.

$$(\text{상대도수})=\frac{(\text{도수})}{(\text{도수의 총합})}$$

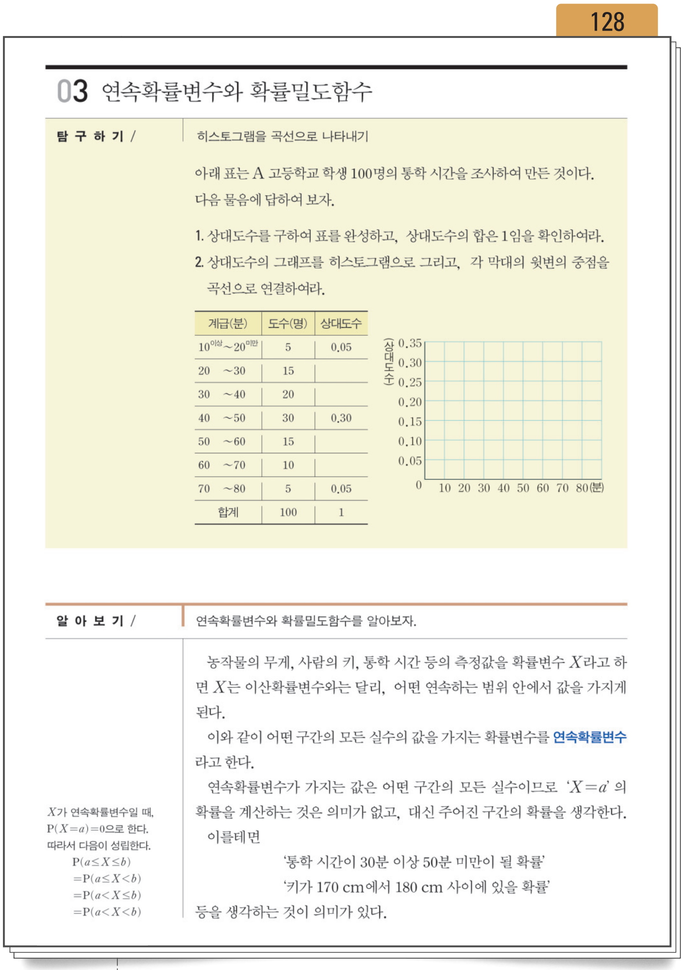
따라서 주어진 도수분포표의 빈칸을 채우면 다음 표와 같다.

계급(분)	도수(명)	상대도수
$10^{\text{이상}}\sim 20^{\text{미만}}$	5	0.05
20 ~30	15	**0.15**
30 ~40	20	**0.20**
40 ~50	30	0.30
50 ~60	15	**0.15**
60 ~70	10	**0.10**
70 ~80	5	0.05
합계	100	1

또 상대도수의 합은

$0.05+0.15+0.20+0.30+0.15$
$+0.10+0.05$
$=1$

임을 확인할 수 있다.


128

03 연속확률변수와 확률밀도함수

탐 구 하 기 / 히스토그램을 곡선으로 나타내기

아래 표는 A 고등학교 학생 100명의 통학 시간을 조사하여 만든 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 상대도수를 구하여 표를 완성하고, 상대도수의 합은 1임을 확인하여라.
2. 상대도수의 그래프를 히스토그램으로 그리고, 각 막대의 윗변의 중점을 곡선으로 연결하여라.

계급(분)	도수(명)	상대도수
$10^{\text{이상}}\sim 20^{\text{미만}}$	5	0.05
20 ~30	15	
30 ~40	20	
40 ~50	30	0.30
50 ~60	15	
60 ~70	10	
70 ~80	5	0.05
합계	100	1

알 아 보 기 / 연속확률변수와 확률밀도함수를 알아보자.

농작물의 무게, 사람의 키, 통학 시간 등의 측정값을 확률변수 X라고 하면 X는 이산확률변수와는 달리, 어떤 연속하는 범위 안에서 값을 가지게 된다.

이와 같이 어떤 구간의 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 한다.

연속확률변수가 가지는 값은 어떤 구간의 모든 실수이므로 '$X=a$'의 확률을 계산하는 것은 의미가 없고, 대신 주어진 구간의 확률을 생각한다.

이를테면

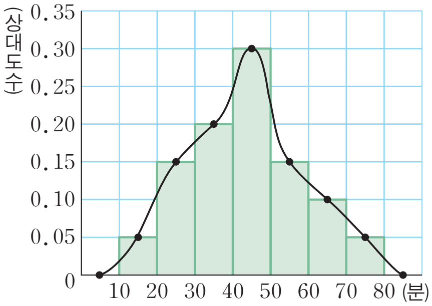
'통학 시간이 30분 이상 50분 미만이 될 확률'

'키가 170 cm에서 180 cm 사이에 있을 확률'

등을 생각하는 것이 의미가 있다.

X가 연속확률변수일 때, $P(X=a)=0$으로 한다. 따라서 다음이 성립한다.
$P(a\le X\le b)$
$=P(a\le X<b)$
$=P(a<X\le b)$
$=P(a<X<b)$

2. 탐구하기 1에 있는 상대도수를 히스토그램으로 그리고, 각 막대의 윗변의 중점을 곡선으로 연결하면 다음 그림과 같다.



알아보기 / 해설

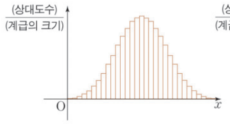
- 동전의 개수 또는 형제의 수를 조사할 때의 측정값과 키 또는 몸무게를 조사할 때의 측정값은 본질적으로 다르다.
  이를테면 동전의 개수를 X개라고 할 때, '$X=51$'의 의미는 동전이 꼭 51개 있다는 뜻이다.
  그러나 몸무게를 X kg이라고 할 때, '$X=51$'의 의미는 50.5 kg 이상 51.5 kg 미만이라는 뜻이다.
  즉, $50.5\le X<51.5$이다.
- 연속확률변수가 가지는 값은 무한개이므로 통계적 확률 또는 수학적 확률의 정의에서 분모의 값은 무한대가 된다.
  따라서 이러한 경우 '$X=a$'의 확률은 0으로 하는 것이 타당하다.

129

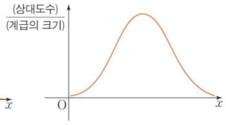
$\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 생각하는 것은 히스토그램의 넓이 또는 도수분포다각형 내부의 넓이를 1로 만들기 위해서이다.

이와 같은 측정에서 조사 대상의 수를 늘리고, 상대도수의 분포표에서 계급의 크기를 줄여서 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$의 히스토그램을 그리면 | 그림1 | 과 같이 될 것이다.

또 조사 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 더욱 줄이면 히스토그램의 윗변의 중점을 연결하여 그린 도수분포다각형은 | 그림2 | 와 같이 매끄러운 곡선에 가까워질 것이다.



| 그림1 |



| 그림2 |

이때, 이 곡선은 항상 x축보다 위쪽 부분에 있고 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이 된다.

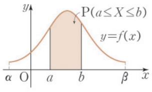
이러한 곡선은 어떤 함수의 그래프가 되는데 이 함수를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

일반적으로 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 값을 가지는 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X가 구간 $[a, b]$ $(\alpha \le a \le b \le \beta)$에 속할 확률은

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

로 주어진다.

여기서 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이이다.



| **참고** | $f(a)$는 $x=a$에서의 확률이 아니고 단지 $x=a$에서의 함숫값이다.

일반적으로 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

확률밀도함수의 성질은 확률질량함수의 성질과 유사하다.

확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$ $(\alpha \le x \le \beta)$이면

(1) $f(x) \ge 0$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$

(3) $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

• 교과서 126쪽에서 설명한 이산확률변수에 대한 확률질량함수의 성질과 여기서 설명하는 연속확률변수에 대한 확률밀도함수의 성질은 같다.
즉, 확률질량함수의 성질에서 합의 기호 $\sum$를 적분 기호 $\int$로 바꾸어 놓으면 확률밀도함수의 성질임을 알 수 있다.

• 이산확률변수에서와는 달리 연속확률변수에서는 다음 사건의 확률은 모두 같다.
즉, 사건

$a < X \le b$, $a < X < b$

$a \le X < b$, $a \le X \le b$

에 대하여

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(a < X \le b) \\ &= \mathrm{P}(a < X < b) \\ &= \mathrm{P}(a \le X < b) \\ &= \mathrm{P}(a \le X \le b) \end{aligned}$$

• 연속확률변수와 확률밀도함수를 보다 엄밀하게 도입하면 다음과 같다.
확률변수 X에 대응하는 분포함수

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$$

가 다음과 같은 적분으로 표현될 수 있을 때, X를 연속확률변수라고 한다.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

여기서 피적분함수 $f(t)$를 확률밀도함수라고 한다.
이때, 확률밀도함수 $f(t)$는

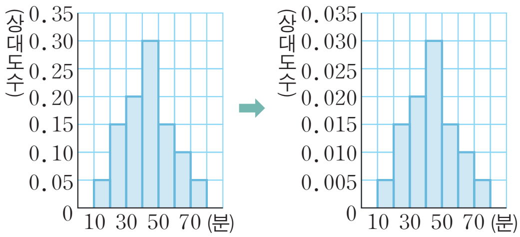
(1) $f(t) \ge 0$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

을 만족한다.

보충 학습

연속확률변수에 대하여 상대도수의 히스토그램을 작성할 때, y축의 척도(scale)를 계급의 크기로 나누어서 생각하는 것이 좋다. 왜냐하면 y축의 척도를 계급의 크기로 나누어야 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이 되기 때문이다.



(사각형의 넓이의 합)=10 (사각형의 넓이의 합)=1

함 께 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 어떤 역에서 지하철을 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어질 때, 물음에 답하여라.

$$f(x)=kx(10-x)\ (\text{단, } 0\le x\le 10)$$

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 기다리는 시간이 3분 이하일 확률을 구하여라.

풀이

(1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로 $\int_0^{10} f(x)dx=1$

즉, $\int_0^{10} kx(10-x)dx=1$이므로

$$\left[-\frac{k}{3}x^3+5kx^2\right]_0^{10}=\frac{500}{3}k=1$$

$$\therefore k=\mathbf{\frac{3}{500}}$$

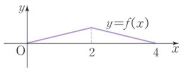
기다리는 시간이 3분 이하 $\iff 0\le X\le 3$

(2) $\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\int_0^3 \frac{3}{500}x(10-x)dx$

$$=\frac{3}{500}\left[-\frac{1}{3}x^3+5x^2\right]_0^3=\mathbf{0.216}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 107쪽 | 익힘책 108쪽 | 익힘책 109쪽

1 어떤 백화점에서 계산을 하기 위해 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $f(2)$의 값을 구하여라.

(2) 기다리는 시간이 3분 이내일 확률을 구하여라.

2 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=k\ (2\le x\le 6)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프를 그려라.

(3) $\mathrm{P}(2.5\le X\le 4.5)$를 구하여라.

함께하기 / 해설

1 확률밀도함수의 성질

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$$

을 이용한다.

여기서 구간 $[\alpha,\ \beta]$는 확률밀도함수 $f(x)$의 정의역이다.

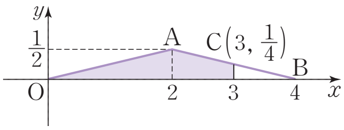
스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\frac{1}{2}\times 4\times f(2)=1$

$$\therefore f(2)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) 구하는 확률은 아래 그림에서 색칠된 부분의 넓이이다.

점 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 A, 점 $(4,\ 0)$을 B라고 하면 선분 AB와 직선 $x=3$이 만나는 점 C의 좌표는 $\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$이다.



$$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 3)=1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}$$

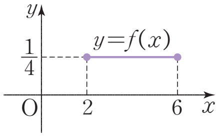
$$=\mathbf{\frac{7}{8}}$$

2 (1) $\int_2^6 k\,dx=\left[kx\right]_2^6$

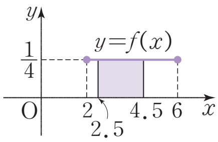
$$=(6-2)k=1$$

$$\therefore k=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) $f(x)=\frac{1}{4}$ $(2\le x\le 6)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $\mathrm{P}(2.5\le X\le 4.5)$는 오른쪽 그림에서 색칠된 부분의 넓이와 같다.



$$\therefore \mathrm{P}(2.5\le X\le 4.5)$$

$$=\int_{2.5}^{4.5}\frac{1}{4}dx=\left[\frac{1}{4}x\right]_{2.5}^{4.5}$$

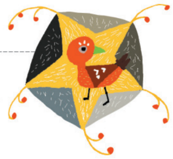
$$=(4.5-2.5)\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

131

2 평균과 표준편차

학습 목표

- 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
- 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
- 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 이해한다.



1 확률분포

다 가 서 기 / **기대되는 금메달**

우리나라는 2008년 베이징 올림픽에서 금메달 13개, 은메달 10개, 동메달 8개로 총 31개의 메달을 획득하였다. 이것은 금메달의 개수가 1988년 서울 올림픽 이후부터 2004년 아테네 올림픽까지의 평균을 뛰어넘는 좋은 성적이다.

연도	개최지	금(개)	은(개)	동(개)	합계
1988	서울	12	10	11	33
1992	바르셀로나	12	5	12	29
1996	애틀랜타	7	15	5	27
2000	시드니	8	10	10	28
2004	아테네	9	12	9	30
합계		48	52	47	147
평균		9.6	10.4	9.4	29.4

소단원의 학습 목표

1. 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
2. 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
3. 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

기댓값, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$

다가서기 / 해설

평균은

$$(\text{평균})=\frac{(\text{모든 자료의 총합})}{(\text{자료의 개수})}$$

으로 1988년 서울 올림픽 이후부터 2008년 베이징 올림픽까지 우리나라가 획득한 금메달의 수의 평균을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{12+12+7+8+9+13}{6}$$

$$=\frac{61}{6}\fallingdotseq 10.2(\text{개})$$

같은 방법으로 은메달의 수와 동메달의 수의 평균을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

연도	개최지	금(개)	은(개)	동(개)	합계
1988	서울	12	10	11	33
1992	바르셀로나	12	5	12	29
1996	애틀랜타	7	15	5	27
2000	시드니	8	10	10	28
2004	아테네	9	12	9	30
2008	베이징	13	10	8	31
합계		61	62	55	178
평균		10.2	10.3	9.2	29.7

또 1994년 릴레함메르 동계 올림픽 이후부터 2010년 밴쿠버 올림픽까지 우리나라가 획득한 금메달, 은메달, 동메달의 수와 각각의 평균은 다음 표와 같다.

연도	개최지	금(개)	은(개)	동(개)	합계
1994	릴레함메르	4	1	1	6
1998	나가노	3	1	2	6
2002	솔트레이크시티	2	2	0	4
2006	토리노	6	3	2	11
2010	밴쿠버	6	6	2	14
합계		21	13	7	41
평균		4.2	2.6	1.4	8.2

탐구하기 / 풀이

(i) 게임 1을 택한 경우

각 게임에서 졌을 때 생길 수 있는 손해를 알아보고 손해가 가장 적은 게임을 택한 것이다. 게임 1의 손해는 1000원, 게임 2의 손해는 5000원, 게임 3의 손해는 2000원이기 때문이다.

(ii) 게임 2를 택한 경우

각 게임에서 이겼을 때 생길 수 있는 이익을 알아보고 이익이 가장 많은 게임을 택한 것이다. 게임 1의 이익은 1000원, 게임 2의 이익은 5000원, 게임 3의 이익은 3000원이기 때문이다.

(iii) 게임 3을 택한 경우

각 게임에서 얻을 수 있는 평균 이익을 생각하고 그 값이 가장 큰 게임을 택한 것이다. 게임 1과 게임 2의 평균 이익은 0원이고, 게임 3의 평균 이익은 500원이기 때문이다.

어느 게임을 택하더라도 그 이유가 합리적이면 된다.

132

01 이산확률변수의 평균과 표준편차

탐 구 하 기 / 최선의 선택

오른쪽 표는 세 가지의 동전 던지기 게임에 대한 상금을 적은 것이다. 이를테면 게임 1은 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 1000원을 받고, 뒷면이 나오면 1000원을 주는 것이다.

게임	앞면	뒷면
게임 1	+1000원	−1000원
게임 2	+5000원	−5000원
게임 3	+3000원	−2000원

세 가지의 게임 중 각자 하고 싶은 게임을 택하고, 택한 이유를 말하여 보자.

알 아 보 기 / 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 알아보자.

오른쪽 표와 같이 상금이 걸린 100장의 복권에서 상금의 평균은

상금(원)	복권 수(장)
10000	1
5000	5
1000	55
0	39
합계	100

$$\frac{10000\times1+5000\times5+1000\times55+0\times39}{100}$$
$$=900(\text{원}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 여기서 복권 1장에 대한 상금을 확률변수 X라고 할 때, ㉠의 좌변은 X의 각 값과 그에 대응하는 확률을 곱하여 더한 것과 같다. 즉

확률변수 X의 확률분포

X	$P(X=x)$
10000	$\frac{1}{100}$
5000	$\frac{5}{100}$
1000	$\frac{55}{100}$
0	$\frac{39}{100}$
합계	1

$$10000\times\frac{1}{100}+5000\times\frac{5}{100}+1000\times\frac{55}{100}+0\times\frac{39}{100}=900(\text{원})$$

이때, 상금의 평균 900원은 복권을 1장 살 때 상금으로 기대할 수 있는 값이다.

일반적으로 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같이 주어졌다고 하자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

이때, $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$를 확률변수 X의 **기댓값** 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathbf{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

기댓값 $E(X)$의 E는 Expectation의 첫 글자이다.

알아보기 / 해설

확률변수의 평균, 분산 및 표준편차는 도수분포표에서의 평균, 분산 및 표준편차와 연관지어서 생각하면 편리하다.

다음 도수분포표에서 평균, 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

계급값	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
도수	f_1	f_2	$\cdots$	f_n	N
상대도수	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\cdots$	$\frac{f_n}{N}$	1

평균은

$$(\text{평균})=\frac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{N}=m$$

이때, 상대도수 $\frac{f_i}{N}=p_i$라고 하면

$$(\text{평균})=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{f_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

즉, 도수분포표에서 계급값을 확률변수 X의 값으로, 상대도수를 $P(X=x_i)=p_i$로 생각하면

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

이다.

133

혼동이 없을 때는 $E(X)$를 간단히 m으로 쓴다. 이때, m은 mean의 첫 글자이다.

분산 $V(X)$의 V는 Variance의 첫 글자이다.

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = E(X^2)$

표준편차 σ(sigma)는 standard deviation의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.

도수분포에서 변량이 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도를 나타내는 산포도로서 분산과 표준편차를 생각하였다. 마찬가지로 확률분포에서도 확률변수의 분산과 표준편차를 생각할 수 있다.

일반적으로 확률변수 X의 기댓값을 $E(X)=m$이라고 하면 편차의 제곱 $(X-m)^2$은

$$(x_1-m)^2,\ (x_2-m)^2,\ \cdots,\ (x_n-m)^2$$

의 값을 가지는 확률변수로서, X가 m으로부터 떨어진 정도를 나타낸다.

이때, $(X-m)^2$의 기댓값을 확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로

$$\mathbf{V(X)}$$

와 같이 나타낸다.

확률변수 X의 확률분포가

$$P(X=x_i)=p_i \ (\text{단, } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

일 때, 확률변수 X의 분산 $V(X)$는

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m^2 + m^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m^2 = E(X^2)-m^2 \end{aligned}$$

과 같이 계산한다.

또 분산 $V(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로

$$\boldsymbol{\sigma(X)}$$

와 같이 나타낸다. 즉

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이산확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

(1) 평균 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m$

(2) 분산 $V(X)=E((X-m)^2)=E(X^2)-m^2$

(3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\ &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i-m)^2 p_i \\ &= E((X-m)^2) \end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

분산은

$$(\text{분산})=\frac{\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 f_i}{N}$$

이때, 상대도수 $\dfrac{f_i}{N}=p_i$라고 하면

$$\begin{aligned} (\text{분산}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\frac{f_i}{N} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i \end{aligned}$$

따라서 확률변수 X가 가지는 값이 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이고 각각 대응하는 확률이 p_1, p_2, $\cdots$, p_n일 때, X의 확률분포를 나타낸 표와 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

보충 학습

분산과 표준편차는 모두 산포도를 나타낸다. 그런데 분산의 단위는 확률변수 X의 측정값 단위의 제곱이고, 표준편차의 단위는 측정값의 단위와 같다. 그러므로 실제로 통계에서는 표준편차가 많이 쓰인다.

예를 들어 확률변수 X가 사람들의 키를 나타낼 때, 측정값은 170 cm, 165 cm, 173 cm, $\cdots$ 등으로 그 단위가 cm이다.

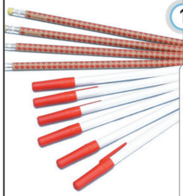
이때, 평균 $m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$의 단위도 cm이다.

한편 분산 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$에서 $(x_i-m)^2$이므로 그 단위는 cm^2가 된다.

그러나 표준편차는 $\sqrt{(\text{분산})}$이므로 그 단위는 cm임을 알 수 있다.

함 께 하 기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽



1 볼펜 6자루와 연필 4자루 중 임의로 2자루를 고를 때 나오는 연필의 개수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

풀이

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$$P(X=0)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_6C_0\times{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

확률변수 X의 평균 $E(X)$를 구하면

$$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$

한편 $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$이므로 확률변수 X의 분산 $V(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{16}{15}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{32}{75}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{32}{75}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{15}}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1

2 세 개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

1 $E(X)$

$=(-2)\times0.1+(-1)\times0.2$
$\quad+0\times0.35+1\times0.3+2\times0.05$

$=-0.2-0.2+0+0.3+0.1$

$=\mathbf{0}$

$V(X)$

$=(-2)^2\times0.1+(-1)^2\times0.2$
$\quad+0^2\times0.35+1^2\times0.3$
$\quad+2^2\times0.05-0^2$

$=0.4+0.2+0+0.3+0.2-0$

$=\mathbf{1.1}$

$\sigma(X)=\mathbf{\sqrt{1.1}}$

2 세 개의 동전을 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본 공간은

{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH}

(i) 앞면이 나오는 개수가 0개인 경우는 {TTT}의 1가지

(ii) 앞면이 나오는 개수가 1개인 경우는 {TTH, THT, HTT}의 3가지

(iii) 앞면이 나오는 개수가 2개인 경우는 {THH, HTH, HHT}의 3가지

(iv) 앞면이 나오는 개수가 3개인 경우는 {HHH}의 1가지

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=1)=\frac{3}{8}$,

$P(X=2)=\frac{3}{8}$, $P(X=3)=\frac{1}{8}$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차는

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

$$V(X)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}$$
$$+3^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

135

02 연속확률변수의 평균과 표준편차

알 아 보 기 / 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 알아보자.

이산확률변수에서 쓰이는 $\sum$와 연속확률변수에서 쓰이는 $\int$은 같은 성질을 가지고 있다.

이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 개념을 연속확률변수에 적용하여 보자.

연속확률변수 X가 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 값을 가지고, 그 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 정의한다.

연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차

(1) 평균 $\mathrm{E}(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx=m$

(2) 분산 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2$

(3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

주어진 정의역 이외에서는 $f(x)=0$으로 생각한다.

| **보기** | 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=2x$ $(0\le x\le 1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차는

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=3x^2$ $(0\le x\le 1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

2. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=\begin{cases}1+x & (-1\le x\le 0)\\ 1-x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{0} x(1+x)dx+\int_0^1 x(1-x)dx$

알아보기 / 해설

미적분에서 합의 기호 $\sum$와 적분 기호 $\int$은 같은 성질을 가지고 있음을 배웠다.

마찬가지로 연속확률변수의 평균과 분산을 정의할 때에는 이산확률변수의 평균과 분산의 정의에서 합의 기호 $\sum$를 적분 기호 $\int$로 바꾸면 된다.

즉, 다음을 알 수 있다.

구분	이산확률변수	연속확률변수
평균	$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$
분산	$\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$	$\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)dx$

스스로 하기 / 풀이

1. $$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\int_0^1 3x^3dx=\left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\int_0^1 3x^4dx-\frac{9}{16}=\left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1-\frac{9}{16}=\mathbf{\frac{3}{80}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{80}}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{20}}$$

2. $$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{0} x(1+x)dx+\int_0^1 x(1-x)dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x+x^2)dx+\int_0^1 (x-x^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\mathbf{0}$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx+\int_0^1 x^2(1-x)dx-0^2$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+x^3)dx+\int_0^1(x^2-x^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{6}}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

탐구하기 / 풀이

1. $Y=X-1$이므로 X의 값이 0, 1, 2일 때 Y의 값은 각각 -1, 0, 1이다.
따라서 Y의 확률분포표는 다음과 같다.

Y	-1	**0**	**1**	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	1

2. X의 확률분포표에서

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}$$
$$=\mathbf{1}$$

Y의 확률분포표에서

$$\mathrm{E}(Y)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}$$
$$=\mathbf{0}$$

따라서 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{E}(Y)$의 관계는 다음과 같다.

$\mathbf{E(Y)=E(X)-1}$

3. $Z=2X$이므로 X의 값이 0, 1, 2일 때 Z의 값은 각각 0, 2, 4이다.
따라서 Z의 확률분포표는 다음과 같다.

Z	0	**2**	**4**	합계
$\mathrm{P}(Z=z)$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	1

4. X의 확률분포표에서

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}-1^2=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Z의 확률분포표에서

$$\mathrm{E}(Z)=0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=2$$
$$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{E}(Z^2)-\{\mathrm{E}(Z)\}^2$$
$$=0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}-2^2=\mathbf{2}$$

따라서 $\mathrm{V}(X)$와 $\mathrm{V}(Z)$의 관계는 다음과 같다.

$\mathbf{V(Z)=4V(X)}$

03 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

탐 구 하 기 / 확률변수 $X-1$과 $2X$

오른쪽 표는 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

1. 오른쪽 표는 $Y=X-1$이라고 할 때, Y의 확률분포를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

Y	-1			합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$			1

2. $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$를 각각 구하고, 이들을 비교하여라.
3. 오른쪽 표는 $Z=2X$라고 할 때, Z의 확률분포를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

Z	0			합계
$\mathrm{P}(Z=z)$	$\frac{1}{4}$			1

4. $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{V}(Z)$를 각각 구하고, 이들을 비교하여라.

알 아 보 기 / 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 알아보자.

확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 일차식으로 표시된 확률변수 $Y=aX+b$ ($a\neq0$, b는 상수)를 생각하여 보자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

이때, $y_i=ax_i+b$라고 하면 $\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$이므로 확률변수 Y의 평균은

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i$$
$$=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b$$

이고, $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 Y의 분산은

$$\mathrm{V}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\mathrm{E}(Y)\}^2p_i=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i$$
$$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)$$

Σ와 $\int$의 성질이 같음을 이용하면 연속확률변수에서도 이와 같은 성질이 성립함을 밝힐 수 있다.

알아보기 / 해설

평균, 분산 및 표준편차의 성질을 예를 통해 알아보자.

A 학급 학생들의 시험 성적의 평균이 40점, 표준편차가 5점이다. 즉, A 학급 학생들의 시험 성적을 확률변수 X라고 하면

$\mathrm{E}(X)=40$, $\sigma(X)=5$

(i) A 학급 학생들의 점수를 모두 5점씩 올리면 올린 점수는 $X+5$이므로
$\mathrm{E}(X+5)=\mathrm{E}(X)+5=45$
$\sigma(X+5)=\sigma(X)=5$
따라서 반의 평균은 40점에서 45점으로 올라가지만 표준편차는 편차의 크기와 관계된 것이므로 그대로 5점이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 $aX+b$ ($a\neq0$, b는 상수)에 대하여

(1) 평균 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) 분산 $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) 표준편차 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$\sigma(aX+b)=\sqrt{\mathrm{V}(aX+b)}$
$=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}$
$=|a|\sigma(X)$

| 보기 | 확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라고 할 때, $Z=\frac{X-m}{\sigma}$의 평균 $\mathrm{E}(Z)$와 분산 $\mathrm{V}(Z)$를 구하면

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
$$=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}=\frac{m}{\sigma}-\frac{m}{\sigma}=0$$
$$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
$$=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$$

스스로 하기 /

익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 $\mathrm{E}(X)=50$, $\mathrm{V}(X)=25$일 때, 다음 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $X+10$ (2) $5X+10$

2 평균이 m, 표준편차가 σ인 시험의 원점수 X를 다음과 같이 T 점수로 바꿀 때, 물음에 답하여라.

$$T=10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

(1) T 점수의 평균과 표준편차를 구하여라.

(2) 오른쪽 표는 어느 학교 학생들의 국어 시험과 수학 시험의 평균 및 표준편차이다. 이 시험에서 영주의 국어 점수와 수학 점수는 모두 72점이었다. 영주의 국어 점수와 수학 점수에 대한 T 점수를 구하고 이를 비교하여라.

	평균	표준편차
국어	60	10
수학	40	16

(ii) A 학급 학생들의 점수를 모두 2배로 올리면 올린 점수는 $2X$이므로

$\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)=80$

그러므로 반의 평균은 40점에서 80점으로 올라간다.

이때, 한 학생의 점수가 45점이었다면 2배를 하기 전의 편차는 $45-40=5$(점)이지만 2배를 한 후의 편차는 $90-80=10$(점)으로 2배가 된다. 따라서 편차가 2배가 되므로 표준편차도 2배가 되어 10점이 된다. 즉,

$\sigma(2X)=|2|\sigma(X)=10$

이와 같이 확률변수 X가 $Y=aX+b$의 꼴로 바뀌면 $\mathrm{E}(Y)$는 a, b의 값 모두에 영향을 받지만 $\mathrm{V}(Y)$, $\sigma(Y)$는 a의 값에만 영향을 받는다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\mathrm{E}(X+10)=\mathrm{E}(X)+10$

$=50+10=\mathbf{60}$

$\mathrm{V}(X+10)=\mathrm{V}(X)=\mathbf{25}$

$\sigma(X+10)=\sigma(X)=\mathbf{5}$

(2) $\mathrm{E}(5X+10)=5\mathrm{E}(X)+10$

$=5\times50+10$

$=\mathbf{260}$

$\mathrm{V}(5X+10)=25\mathrm{V}(X)$

$=25\times25=\mathbf{625}$

$\sigma(5X+10)=5\sigma(X)$

$=5\times5=\mathbf{25}$

2 (1) $\mathrm{E}(T)$

$=\mathrm{E}\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)$

$=\mathrm{E}\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10}{\sigma}m+50\right)$

$=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10}{\sigma}m+50$

$=\frac{10}{\sigma}m-\frac{10}{\sigma}m+50=\mathbf{50}$

$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10}{\sigma}m+50\right)$

$=\frac{10}{\sigma}\sigma(X)$

$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=\mathbf{10}$

(2) 국어 점수:

$T=10\times\frac{72-60}{10}+50=\mathbf{62}$(점)

수학 점수:

$T=10\times\frac{72-40}{16}+50$

$=\mathbf{70}$(점)

국어와 수학에서 같은 점수 72점을 받았지만 T 점수에 의하면 수학 점수가 **70**점으로 국어 점수 **62**점보다 더 높다.

공학 도구 / 해설

엑셀 프로그램에서 편집 화면에 있는 각각의 직사각형을 셀(cell)이라고 부른다. 셀은 세포를 뜻하는 단어인데, 엑셀의 각 직사각형이 마치 세포막을 형성한 것과 같아 보여 셀이라고 이름 지어졌다.

셀의 주소는 열의 번지와 행의 번지로 구성되어 있는데 열의 번지는 왼쪽에서 오른쪽으로 A, B, C, …의 알파벳으로, 행의 번지는 위에서 아래로 1, 2, 3, …의 숫자로 표시되어 있다. 본문의 예에서 8/15은 3열 2행, 즉 C2 셀에 기록되어 있으며, D3 셀에는 0.266666667이 기록되어 있다.

138

공학 도구

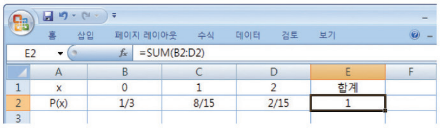
컴퓨터 프로그램을 이용하여 이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차 구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 134쪽의 함께하기 1에 주어진 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 구할 수 있다.

1. 확률분포를 입력하여 보자.

❶ A1 셀에 확률변수 'x'를 입력하고 B1, C1, D1 셀에 확률변수 X가 가지는 값을 각각 입력한다. 또 E1 셀에 '합계'를 입력한다.

❷ A2 셀에 확률변수 'P(x)'를 입력하고 B2, C2, D2 셀에 각각의 확률을 입력한다. 또 마우스 끌기를 하여 B2~D2 셀을 선택한 후 수식 메뉴의 자동합계(Σ) 아이콘을 클릭하면 E2 셀에 SUM(B2:D2), 즉 B2 셀부터 D2 셀까지의 합이 계산된다.



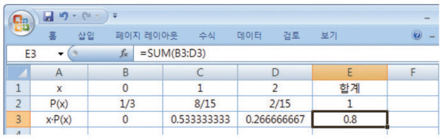
2. 평균을 계산하여 보자.

❶ A3 셀에 'x·P(x)'를 입력한다.

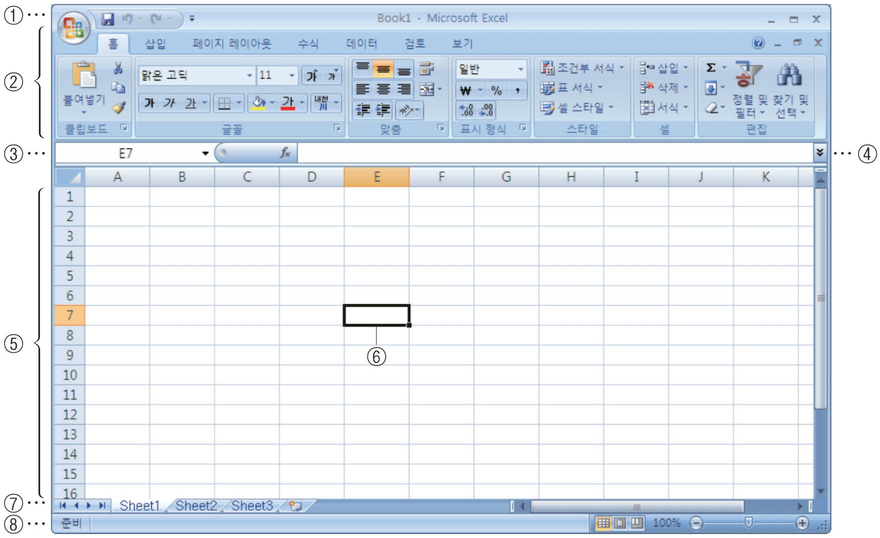
❷ B3 셀에 '=B1＊B2'를 입력하고 Enter 키를 누른다.

❸ B3 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓으면 커서가 십자(+)표시로 바뀐다. 이때, 마우스 끌기를 하여 D3 셀까지 선택하면 C3, D3 셀에 자동으로 나머지 '=C1＊C2', '=D1＊D2'가 각각 입력된다.

❹ 마우스 끌기를 하여 B3~D3 셀을 선택한 후 자동합계(Σ) 아이콘을 클릭한다. 이렇게 하면 E3 셀에 SUM(B3:D3), 즉 E(X)의 값이 계산된다.



참고 | 엑셀 2007의 화면 구성



139

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

3. 분산과 표준편차를 계산하여 보자.

❶ A4 셀에 '$x^2 \cdot \mathrm{P}(x)$'를 입력한다.

❷ B4 셀에 '=B1^2 * B2'를 입력한 뒤 Enter 키를 누른다.

❸ B4 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓으면 커서가 십자(+)표시로 바뀌면 D4 셀까지 마우스 끌기를 하여 나머지 셀의 값을 구한다.

❹ 마우스 끌기를 하여 B4~D4 셀을 선택한 후 자동합계(∑)아이콘을 클릭한다. 이렇게 하면 E4 셀에 SUM(B4:D4), 즉 $\mathrm{E}(X^2)$의 값이 계산된다.

E4 =SUM(B4:D4)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x^2·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						

❺ B6 셀에 '$\{\mathrm{E}(X)\}^2$'을 입력하고, C6 셀에 '=E3^2'를 입력한다.

❻ B8 셀에 '$\mathrm{V}(X)$'를 입력하고, C8 셀에 '=E4−C6'을 입력한다. 이렇게 하면 C8 셀에 $\mathrm{V}(X)$의 값이 계산된다.

❼ B10 셀에 '표준편차'를 입력하고, C10 셀에 '=SQRT(C8)'을 입력한다. 이렇게 하면 C10 셀에 표준편차의 값이 계산된다.

C10 =SQRT(C8)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x^2·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						
6		$\{E(x)\}^2$	0.64			
7						
8		V(x)	0.426666667			
9						
10		표준편차	0.653197265			
11						

① 제목 표시줄: 현재 사용하고 있는 파일 이름과 프로그램 이름이 표시되는 곳이다.

② 리본 메뉴: 액셀 2007에서 제공하는 여러 가지 명령에 관한 명령 아이콘들을 모아둔 곳이다.

③ 이름 상자: 현재 셀 포인터의 셀 주소를 보여주며, 함수를 사용할 때는 함수명을 보여준다.

④ 수식 입력줄: 셀에 데이터나 수식을 입력하고, 입력되어 있는 데이터나 수식을 보여주는 곳이다.

⑤ 워크시트 창: 내용을 작성하고 편집하는 곳이다.

⑥ 셀 포인터: 선택한 현재 셀을 의미한다.

⑦ 시트 탭: 통합 문서를 구성하는 시트들을 나타내는 곳으로, 각 시트들의 이름이 표시되는 곳이다.

⑧ 상태 표시줄: 현재 작업 영역의 명령에 대한 정보를 알려준다.

Plus 문제

엑셀 프로그램을 이용하여 교과서 134쪽의 스스로 하기 **1**에 주어진 확률변수의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

| 풀이 |

(1) 확률변수 X의 확률분포를 입력한다.

G2 =SUM(B2:F2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1

(2) 평균 $\mathrm{E}(X)$를 계산한다.

G3 =SUM(B3:F3)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0

(3) 분산 $\mathrm{V}(X)$를 계산한다.

G4 =SUM(B4:F4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0
4	x^2·P(x)	0.4	0.2	0	0.3	0.2	1.1

이상에서 다음을 알 수 있다.

$\mathrm{E}(X^2)=1.1,\ \{\mathrm{E}(X)\}^2=0$

따라서 다음과 같이 분산과 표준편차를 구할 수 있다.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=1.1-0=1.1$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$
$$=\sqrt{1.1}\fallingdotseq 1.04881$$

(4) 위의 결과를 정리하면 다음과 같다.

D8 =SQRT(D7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0
4	x^2·P(x)	0.4	0.2	0	0.3	0.2	1.1
5							
6			$\{E(x)\}^2$	0			
7			V(x)	1.1			
8			표준편차	1.04881			

소단원의 학습 목표

1. 이항분포의 뜻을 안다.
2. 이항분포의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.
3. 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
4. 이항분포의 분포표와 그래프를 이해한다.
5. 큰 수의 법칙을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

이항분포, $\mathrm{B}(n,\ p)$, **큰 수의 법칙**

140

1 확률분포

3 이항분포

학습 목표

- 이항분포의 뜻을 안다.
- 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포의 분포표와 그래프를 이해한다.
- 큰 수의 법칙을 이해한다.

다 가 서 기 / **항공권 예약**

항공사에서는 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우에 대비하여 적절한 인원만큼 초과하여 항공권을 팔기도 한다. 이때에 적용되는 모형이 이 단원에서 다루는 이항분포이다.

손님을 좌석의 수보다 적게 탑승시키면 손실이 생기고, 손님을 좌석의 수보다 많게 탑승시키면 좌석이 부족하므로 항공사에서는 항상 적절한 수학 모형을 사용하여 항공권 예약을 받는다.

다가서기 / 해설

비행기는 버스 또는 기차와는 달리 예약을 하였더라도 공항에서 티켓을 발권할 때 좌석을 배정받는다. 그 이유는 여러 가지가 있겠지만 일반 육상 교통과는 달리 기후에 많은 영향을 받기 때문에 불가피한 사태에 대비하여 좌석을 배정하지 않기도 하고, 노약자 등을 위한 좌석도 배정하면서 비상시에 도움을 얻고자 비상구 옆에는 젊고 건강한 사람을 배정하는 것이 관례이기 때문이다.

한편 티켓을 예약한 후 아무런 사전 통보 없이 탑승하지 않는 사람도 있기 때문에 (이것을 no-show라고 한다.) 항공사 측에서는 경영상의 이유로 좌석이 비어 있을 경우를 대비하여 좌석의 수보다 많은 예약을 받는 오버부킹(overbooking)을 하기도 한다.

만약 어느 항공사의 no-show율이 5 %이고 200명 정원인 비행기 노선이 있다면 항공사는 대략 10명 정도가 안 나올 것으로 예상하고 210명의 예약을 받게 된다.

예상대로 10명 이상이 공항에 나오지 않으면 다행이지만, 그렇지 않은 경우에는 어떻게 될까?

이러한 경우에는 리컨펌(reconfirm, 예약 내용을 다시 확인하는 것)한 사람이 우선이다. 그러나 리컨펌을 하였더라도 비행기 탑승에 필요한 시간 내에 좌석을 배정받아야 한다.

통상적으로 출발 시간 기준으로 적어도 국내선은 1시간, 국제선은 2시간 전에는 수속 및 탑승을 완료하여야 한다.

최근에는 no-show율이 낮아지는 추세여서 대부분의 항공사는 오버부킹을 거의 하지 않는다. 그래도 비행기를 타기 전까지 예약이 제대로 되었는지 확인하고, 탑승 및 수속 시간을 지키는 것이 즐거운 여행이 되는 첫걸음이 될 것이다.

141

01 이항분포의 뜻

탐 구 하 기 / 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수의 관찰

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오면 ○표, 그 외의 눈이 나오면 ×표를 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.

네 번의 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수				
0번	1번	2번	3번	4번
××××	×××○	××○○	×○○○	○○○○
	××○×	×○×○	○×○○	
	×○××	×○○×	○○×○	
	○×××	○××○		

알 아 보 기 / 이항분포의 뜻을 알아보자.

1의 눈이 1번 나오는 경우

1회	2회	3회	4회
×	×	×	○
×	×	○	×
×	○	×	×
○	×	×	×

확률: ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1}$

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 독립시행의 확률에 의하여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일반적으로 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$의 값을 가지는 이산확률변수이고, X의 확률분포는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\, p^x(1-p)^{n-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이때, $q=1-p$라고 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	x	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0\, q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\, pq^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2\, p^2q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_x\, p^xq^{n-x}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n\, p^n$	1

$\sum_{x=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_x\, p^xq^{n-x}=(q+p)^n=1$

이 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(q+p)^n$을 전개한 다음 식의 우변의 각 항과 같다.

$$(q+p)^n={}_n\mathrm{C}_0\, q^n+{}_n\mathrm{C}_1\, pq^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_x\, p^xq^{n-x}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\, p^n$$

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 B는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

이와 같은 확률분포를 **이항분포**라 하고, 기호로

$$\mathrm{B}(n,\ p)$$

와 같이 나타낸다.

탐구하기 / 풀이

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 2번, 3번 나오는 경우는 각각 다음과 같다.

2번: ××○○, ×○×○, ×○○×
　　○××○, ○×○×, ○○××

3번: ×○○○, ○×○○, ○○×○, ○○○×

따라서 주어진 표를 완성하면 다음과 같다.

네 번의 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수				
0번	1번	2번	3번	4번
××××	×××○	××○○	×○○○	○○○○
	××○×	×○×○	○×○○	
	×○××	×○○×	○○×○	
	○×××	○××○	○○○×	
		○×○×		
		○○××		

알아보기 / 해설

한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(i) $X=0$인 경우는 ××××의 1가지가 있다.
이때, 각각의 결과는 서로 영향을 주지 않으므로 확률은

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

(ii) $X=1$인 경우는 ×××○, ××○×, ×○××, ○×××의 4가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$이다.
따라서 확률은

$$\mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

(iii) $X=2$인 경우는 ××○○, ×○×○, ×○○×, ○××○, ○×○×, ○○××의 6가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$이다.
따라서 확률은

$$\mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

(iv) $X=3$인 경우는 ×○○○, ○×○○, ○○×○, ○○○×의 4가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$이다.
따라서 확률은

$$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

(v) $X=4$인 경우는 ○○○○의 1가지가 있고, 그 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$이다.
따라서 확률은

$$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

보충 학습

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 경우는 어떤 시행이 독립적으로 반복될 때이다. 그 예로는 주사위나 동전 등을 반복하여 던지는 경우, 사건이 일어난 후 시행 전의 상태로 되돌려 다시 시행하는 경우, 일정한 비율이 주어져 있는 경우 등이 있다. 이처럼 독립적으로 반복되는 시행의 특징은

(i) 같은 시행을 여러 번 반복한다.

(ii) 각 시행에서 매회 어떤 사건이 일어날 확률이 일정하다.

(iii) 각 시행의 결과는 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 받지 않는다.

142

주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

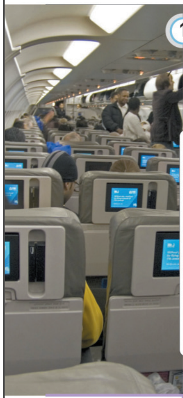
$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

| 보기 | 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{6}\right)$이다.
이 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$	1

함께 하기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽



1 어느 항공 노선을 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우가 20명 중 1명 꼴이라고 한다. 좌석 수 80에 대하여 82명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.
(단, $0.95^{81}=0.0157,\ 0.95^{82}=0.0149$로 한다.)

풀이

예약한 사람이 탑승할 확률은 0.95이다. 그러므로 예약한 82명 중에서 탑승하는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(82,\ 0.95)$이다. 즉

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{82}\mathrm{C}_x\cdot 0.95^x\cdot 0.05^{82-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 82)$$

한편 좌석이 부족하게 되는 것은 $X\geq 81$인 경우이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 81)&=\mathrm{P}(X=81)+\mathrm{P}(X=82)\\&={}_{82}\mathrm{C}_{81}\cdot 0.95^{81}\cdot 0.05+{}_{82}\mathrm{C}_{82}\cdot 0.95^{82}\\&=82\times 0.0157\times 0.05+1\times 0.0149=\mathbf{0.07927}\end{aligned}$$

스스로 하기 /

익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 다음 이항분포의 확률분포를 식과 표로 나타내어라.

(1) $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$

2 어떤 소극장의 공연을 예약한 사람 중 사전 통보 없이 오지 않는 사람이 10 %라고 한다. 좌석 수 60에 대하여 62명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.
(단, $0.9^{61}=0.0016,\ 0.9^{62}=0.0015$로 한다.)

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$에서 $n=4,\ p=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathbf{P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$
(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

이 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

(2) $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$에서 $n=5,\ p=\frac{1}{5}$이므로

$$\mathbf{P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}}$$
(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

이 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{3125}$	1

2 예약한 62명 중에서 공연을 보러 오는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면, X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(62,\ 0.9)$이다. 즉,

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{62}\mathrm{C}_x\cdot 0.9^x\cdot 0.1^{62-x}$$
(단, $x=0,\ 1,\ \cdots,\ 62$)

좌석 수가 60이므로 61명 이상이 공연을 보러 오면 좌석이 부족하게 된다. 즉, $X\geq 61$이면 좌석이 부족하다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\geq 61)\\&=\mathrm{P}(X=61)+\mathrm{P}(X=62)\\&={}_{62}\mathrm{C}_{61}\cdot 0.9^{61}\cdot 0.1+{}_{62}\mathrm{C}_{62}\cdot 0.9^{62}\\&=62\times 0.0016\times 0.1+1\times 0.0015\\&=0.00992+0.0015=\mathbf{0.01142}\end{aligned}$$

02 이항분포의 평균과 표준편차

알 아 보 기 / 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따를 때, 그 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

여기서 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times q^3+1\times 3pq^2+2\times 3p^2q+3\times p^3\\&=3pq^2+6p^2q+3p^3=3p(q+p)^2=3p\end{aligned}$$

$q=1-p$이므로 $q+p=1$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=0^2\times q^3+1^2\times 3pq^2+2^2\times 3p^2q+3^2\times p^3-(3p)^2\\&=3p(q^2+4pq+3p^2-3p)\\&=3p\{(q+p)(q+3p)-3p\}=3pq\end{aligned}$$

일반적으로 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

이항분포의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

| 보기 | 한 개의 주사위를 18번 던질 때, 1 또는 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=4,\ \sigma(X)=2$

주사위를 한 번 던질 때 1 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 다음 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$

2 한 개의 주사위를 36번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

보충 학습

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때,

$x{}_n\mathrm{C}_x=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1},\ x(x-1){}_n\mathrm{C}_x=n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2}$

를 이용하여 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하여 보자.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{x=0}^{n}x{}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\\&=0{}_n\mathrm{C}_0q^n+1{}_n\mathrm{C}_1pq^{n-1}+2{}_n\mathrm{C}_2p^2q^{n-2}+\cdots\\&\quad+n{}_n\mathrm{C}_np^n\\&=0+n{}_{n-1}\mathrm{C}_0pq^{n-1}+n{}_{n-1}\mathrm{C}_1p^2q^{n-2}+\cdots\\&\quad+n{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}p^n\\&=np\{{}_{n-1}\mathrm{C}_0q^{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_1pq^{n-2}+\cdots\\&\qquad+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}\}\\&=np(q+p)^{n-1}=np\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\sum_{x=0}^{n}x^2{}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}\\&=\sum_{x=0}^{n}\{x(x-1)+x\}{}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}\\&=\sum_{x=0}^{n}x(x-1){}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}\\&\quad+\sum_{x=0}^{n}x{}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}\\&=\sum_{x=0}^{n}n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2}p^xq^{n-x}\\&\quad+np\\&=n(n-1)p^2\\&\quad\times\sum_{x=0}^{n}{}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2}p^{x-2}q^{n-x}+np\\&=n(n-1)p^2+np\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=n(n-1)p^2+np-(np)^2\\&=np(1-p)=npq\end{aligned}$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $n=64,\ p=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{2}=\mathbf{32}$

$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{16}$

$\sigma(X)=\sqrt{16}=\mathbf{4}$

(2) $n=400,\ p=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{5}=\mathbf{80}$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\mathbf{64}$

$\sigma(X)=\sqrt{64}=\mathbf{8}$

2 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=36\times\frac{1}{2}=\mathbf{18}$

$\mathrm{V}(X)=36\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

알아보기 / 해설

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 n의 값이 커지면 p의 값에 관계없이 그 분포와 그래프는 직선 $x=np$에 대하여 좌우 대칭이 된다.

| **그림1** | 에서 보는 바와 같이 n의 값이 작을 때는 한쪽으로 치우친 그래프가 되고, n의 값이 커질 때는 이를테면 $n=50$인 경우에 $np=50\times\frac{1}{6}=8.33\cdots$이므로 직선 $x=8.33\cdots\cdots$에 대하여 좌우 대칭인 그래프가 됨을 알 수 있다.

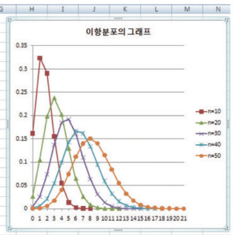
한편, n의 값이 작더라도 p의 값이 0.5에 가까워지면 역시 직선 $x=np$에 대하여 좌우 대칭임을 | **그림2** | 를 통하여 알 수 있다. 특히, $p=0.5$이면 어떠한 n의 값에 대해서도 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 그래프는 직선 $x=np$에 대하여 좌우 대칭이 된다.

03 이항분포의 분포표와 그래프

알 아 보 기 / 이항분포의 분포표와 그래프에 대하여 알아보자.

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 $p=\frac{1}{6}$에 대하여 $n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$일 때, 확률분포의 표와 그래프는 다음과 같다.

x	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50
0	0.1615	0.0261	0.0042	0.0007	0.0001
1	0.3230	0.1043	0.0253	0.0054	0.0011
2	0.2907	0.1982	0.0733	0.0212	0.0054
3	0.1550	0.2379	0.1368	0.0538	0.0172
4	0.0543	0.2022	0.1847	0.0995	0.0405
5	0.0130	0.1294	0.1921	0.1433	0.0745
6	0.0022	0.0647	0.1601	0.1671	0.1118
7	0.0002	0.0259	0.1098	0.1624	0.1405
8	0.0000	0.0084	0.0631	0.1340	0.1510
9		0.0022	0.0309	0.0953	0.1410
10		0.0005	0.0130	0.0591	0.1156
11		0.0001	0.0047	0.0322	0.0841
12		0.0000	0.0015	0.0156	0.0546
13			0.0004	0.0067	0.0319
14			0.0001	0.0026	0.0169
15			0.0000	0.0009	0.0081
16				0.0003	0.0035
17				0.0001	0.0014
18				0.0000	0.0005
19					0.0002
20					0.0001
21					0.0000

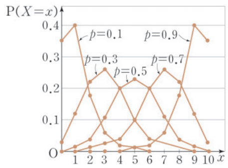


| 그림1 |

다음에 배울 이항분포와 정규분포의 관계에서도 이 성질을 활용한다.

| **그림1** | 에서와 같이 p를 일정하게 하고 n을 크게 하면 이항분포의 그래프는 점차 좌우 대칭인 모양에 가까워진다.

또 | **그림2** | 에서와 같이 n을 일정하게 하고 p를 0.5에 가깝게 하여도 이항분포의 그래프는 좌우 대칭인 모양에 가까워지는 것을 알 수 있다.



| 그림2 |

스 스 로 하 기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 한 개의 주사위를 40번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. | **그림1** | 의 표를 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\le 2)$ (2) $\mathrm{P}(7\le X\le 9)$ (3) $\mathrm{P}(X\ge 15)$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\mathrm{P}(X\le 2)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=0.0007+0.0054+0.0212$

$=\mathbf{0.0273}$

(2) $\mathrm{P}(7\le X\le 9)$

$=\mathrm{P}(X=7)+\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=9)$

$=0.1624+0.1340+0.0953$

$=\mathbf{0.3917}$

(3) $\mathrm{P}(X\ge 15)$

$=\mathrm{P}(X=15)+\mathrm{P}(X=16)+\mathrm{P}(X=17)$
$\quad+\mathrm{P}(X=18)+\cdots+\mathrm{P}(X=40)$

$=0.0009+0.0003+0.0001+0+\cdots+0$

$=\mathbf{0.0013}$

참고 | 백분율(percentage)과 백분율점(percentage point)

백분율과 백분율점은 혼동하기 쉬운 개념이다. 이를테면 어떤 회사의 이익률이 작년에는 4 %이고 올해에는 7 %이었다면 이익률은 몇 %(percentage) 증가하였다고 볼 수 있는가?

이때, 이익률은

$$\frac{7-4}{4}\times 100=75\ \%(\text{percentage})$$

증가하였다고 하여야 정확한 표현이다. 한편, 이익률이

$$7\ \%(\text{point})-4\ \%(\text{point})=3\ \%(\text{point})$$

(3 percentage point, 3 %점)

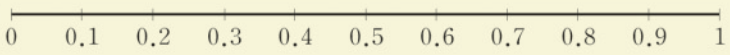
증가하였다고 할 수도 있다. 이와 같이 %의 단순 뺄셈에는 백분율점(percentage point)을 사용한다.

04 큰 수의 법칙

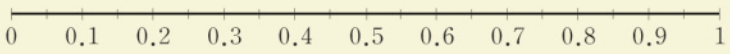
탐 구 하 기 / 동전 던지기

동전 한 개를 던질 때, 앞면이 나올 수학적 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 다음과 같은 활동을 통하여 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 알아보자.

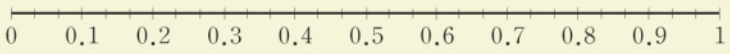
1. 동전 10개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림1 | 에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림1 |


2. 동전 20개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림2 | 에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림2 |


3. 동전 30개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림3 | 에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림3 |


4. 위의 각 그림에 표시된 10개의 점의 분포 상태를 비교하여라.

알 아 보 기 / 큰 수의 법칙을 알아보자.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$이라는 것은 실제로 6번 던지면 1의 눈이 꼭 1번 나온다는 뜻이 아니다.

다음 예를 통하여 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 알아보자.

한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 X라고 할 때, $n=10,\ 30,\ 40$의 각각에 대하여

$$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1,\ 즉\ \frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{n}<\frac{1}{6}+0.1$$

이 성립할 확률을 구하여 보자.

$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1$
$\Longleftrightarrow -0.1<\frac{X}{n}-\frac{1}{6}<0.1$

탐구하기 / 풀이

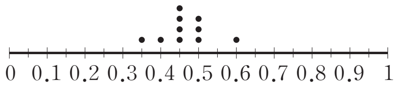
답안 예시

1.

시행 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
앞면의 개수	4	2	9	6	4	5	7	6	3	4
상대 도수	0.4	0.2	0.9	0.6	0.4	0.5	0.7	0.6	0.3	0.4

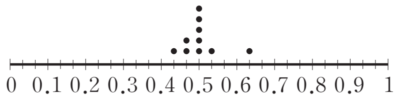
2.

시행 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
앞면의 개수	9	10	7	8	9	10	12	9	9	10
상대 도수	0.45	0.5	0.35	0.4	0.45	0.5	0.6	0.45	0.45	0.5



3.

시행 번호	1	2	3	4	5
앞면의 개수	15	15	14	15	19
상대 도수	0.5	0.5	0.47	0.5	0.63
시행 번호	6	7	8	9	10
앞면의 개수	15	15	16	13	14
상대 도수	0.5	0.5	0.53	0.43	0.47



4. 던지는 동전의 개수가 10, 20, 30으로 많아짐에 따라 앞면이 나오는 상대도수는 0.5에 밀집됨을 알 수 있다.
즉, $n=30$일 때 0.5에 가깝게 밀집되어 있고, $n=10$일 때는 상대적으로 널리 퍼져 있음을 알 수 있다.

구체적으로 $n=10$인 경우 물음 **1**의 그림에서와 같이 10개의 점이 분포되어 있는 범위는
0.5 ± 0.4
$n=20$인 경우 물음 **2**의 그림에서와 같이 10개의 점이 분포되어 있는 범위는
0.5 ± 0.15
$n=30$인 경우 물음 **3**의 그림에서와 같이 10개의 점이 분포되어 있는 범위는
0.5 ± 0.13

보충 학습

확률 실험은 각 시행마다 그 결과가 다를 수 있다. 그러나 전체 결과의 경향은 비슷하게 나타난다.

스스로 하기 / 풀이

1 $n=50$일 때,

$\frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{50}<\frac{1}{6}+0.1$에서

$3.33\cdots<X<13.33\cdots$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{50}<\frac{1}{6}+0.1\right)\\&=\mathrm{P}(3.33\cdots<X<13.33\cdots)\\&=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\\&\quad+\cdots+\mathrm{P}(X=13)\\&=0.0405+0.0745+0.1118\\&\quad+0.1405+0.1510+0.1410\\&\quad+0.1156+0.0841+0.0546\\&\quad+0.0319\\&=\mathbf{0.9455}\end{aligned}$$

146

144쪽의 이항분포표를 이용한다.

(i) $n=10$일 때, $0.66\cdots<X<2.66\cdots$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.66\cdots<X<2.66\cdots)&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=0.3230+0.2907=0.6137\end{aligned}$$

(ii) $n=30$일 때, $2<X<8$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(2<X<8)&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=7)\\&=0.1368+0.1847+\cdots+0.1098=0.7835\end{aligned}$$

(iii) $n=40$일 때, $2.66\cdots<X<10.66\cdots$이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(2.66\cdots<X<10.66\cdots)\\&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)\\&=0.0538+0.0995+\cdots+0.0591=0.9145\end{aligned}$$

위의 결과에서 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{X}{n}$와 수학적 확률 $\frac{1}{6}$의 차가 0.1보다 작을 확률은 시행 횟수 n이 커질수록 1에 가까워짐을 짐작할 수 있다. 즉, 상대도수와 수학적 확률과의 차가 0.1보다 작게 되는 일은 시행 횟수 n을 크게 함에 따라 그 확실성이 커진다. 이 사실은 0.1을 0.01, 0.001, 0.0001, …로 바꾸어도 마찬가지로 성립한다.

일반적으로 다음과 같은 **큰 수의 법칙**이 성립한다.

큰 수의 법칙

어떤 한 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 아무리 작은 양수 h를 택하더라도 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)=1$$

자연 현상이나 사회 현상과 같이 수학적 확률을 구하기 곤란할 때에는 통계적 확률을 대신 사용한다.

큰 수의 법칙에 의하면 시행 횟수 n을 충분히 크게 하였을 때, 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 수학적 확률 p와 같아짐을 알 수 있다.

스스로 하기 / 익힘책 115쪽 | 익힘책 116쪽 | 익힘책 117쪽

1 알아보기에서 $n=50$일 때, 주어진 조건이 성립할 확률을 구하여라.

보충 학습

상대도수 $\frac{X}{n}$가 가까이 가는 구체적인 값은 무엇인가? 즉, $\frac{X}{n}$의 극한값은 무엇인가? 주사위를 던질 때 1의 눈이 나오는 상대도수의 극한값은 $\frac{1}{6}$이라고 많은 사람들이 의심 없이 믿고있지만, 윷을 던질 때 윷 등이 나오는 상대도수에 대한 극한값은 아무도 언급을 하지 않고 있다.

그 이유는 주사위 던지기에서는 수학적 확률을 생각하기가 쉽고, 윷 던지기에서는 어렵기 때문이다. 다시 말하면 통계적 확률의 구체적인 값을 구하기는 매우 어렵다. 그러나 상대도수 $\frac{X}{n}$의 극한값으로 통계적 확률을 생각할 때 생기는 문제에 대한 답을 여기에서 찾을 수 있다.

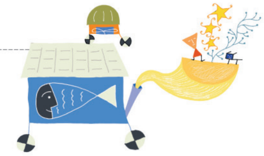
첫째, $\frac{X}{n}$의 극한값은 실제로 계산할 수 없으므로 (많은 사람들의 생각과 같이) 수학적 확률에 가까이 간다라고 생각한다. 그리고 이러한 상대도수와 수학적 확률의 관계를 본문의 내용과 같이 보여줄 수 있다.

둘째, '충분히 큰 n' 이라는 개념에 대해서도 스스로 하기 1을 통하여 시사점을 얻을 수 있다. 즉, $n=10$일 때는 $\frac{X}{n}$와 $\frac{1}{6}$의 차이가 0.1 이내일 확률이 0.6137이지만 $n=50$일 때는 0.9455가 된다. 다시 말하면 $n=50$ 정도만 되어도 상대도수와 수학적 확률의 차이는 거의 (약 95 % 정도로) 0.1 이내가 된다는 것을 알 수 있다.

147

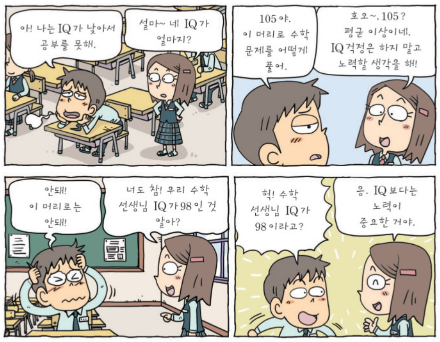
4 정규분포

학습 목표
- 정규분포의 뜻을 안다.
- 정규분포곡선의 성질을 이해한다.
- 표준정규분포의 뜻을 알고, 활용할 수 있다.
- 이항분포와 정규분포의 관계를 이해한다.



1 확률분포

다 가 서 기 / **성공의 99 %는 노력의 결과**



지능지수(IQ)는 지능검사의 결과로 지능의 정도를 총괄하여 하나의 수치로 나타낸 것이다. 이때, 지능지수는 평균(m)이 100이고 표준편차(σ)가 15인 정규분포를 따르도록 한다. 즉, 지능지수가 85~115이면 평균으로부터 1시그마(σ) 안의 범위에 있는 보통의 지능지수이다.

세상에는 분명 천부적인 재능을 타고난 사람이 있다. 그러나 그들도 모든 면에서 뛰어난 것은 아니다. 어떤 면에서 뛰어난 사람은 자기의 부족한 면을 찾을 줄 알아야 하고, 어떤 면에서 부족한 사람은 자기의 뛰어난 점을 찾을 줄 알아야 한다.

에디슨은 "성공은 1 %의 영감과 99 %의 노력의 결과이다."라고 말하였다.

소단원의 학습 목표

1. 정규분포의 뜻을 안다.
2. 정규분포곡선의 성질을 이해한다.
3. 표준정규분포의 뜻을 알고, 표준정규분포표를 활용할 수 있다.
4. 표준화의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
5. 이항분포와 정규분포의 관계를 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

정규분포, $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, **표준정규분포**, $\mathrm{N}(0, 1)$, **표준화**

다가서기 / 해설

IQ는 Intelligence Quotient의 약자로, 사람의 지적 능력을 수치적으로 측정하는 시험에 의해 산출되는 점수이다. 이것을 지능지수라고도 한다.

IQ는 독일의 윌리엄 스턴(William Stern)이 1912년에 어린이들의 인지 능력을 알아보기 위하여 제안한 것을 시초로 볼 수 있다.

한편 미국에서는 비네(Alfred Binet)와 터만(Terman)이 각각 1909년, 1919년에 지능을 정의하였고, 비네의 지능검사 도구를 이용하여 1920년대 뉴욕에서는 IQ를 기반으로 하여 영재 아동을 판별하였다. 근래에 많이 쓰이는 지능검사 도구는 웩슬러(Wechsler)가 제안한 것을 통계적으로 일반화시킨 것이다.

IQ에는 비율 지능(ratio IQ)과 편차 지능(deviation IQ)이 있다. 일반적으로 말하는 지능지수는 편차 지능이다.

편차 지능의 경우는 표준편차를 보통 16으로 사용하는데, 경우에 따라서는 15 또는 24를 사용하기도 한다. 웩슬러 지능검사에서는 표준편차를 15로 사용하고, 멘사에서는 24를 사용한다.

지능지수를 말할 때에 표준편차 없이 수치를 정확히 비교할 수 없으므로 지능지수 검사 도구의 표준편차를 밝히는 것은 중요하다.

현대에는 지능에 대하여 단일한 방법으로 표현할 수 없다는 주장이 설득력을 얻고 있는데 그 대표적인 것이 가드너(Gardner)의 다중지능(Multiple Intelligence)이론으로서 지능에는 언어적 지능, 음악적 지능, 논리 · 수학적 지능, 공간적 지능, 신체 · 운동적 지능, 대인 관계 지능, 개인 내적 지능, 자연 탐구 지능, 영성 · 실존적 지능이 있다고 한다.

탐구하기 / 풀이

1. 답안 예시1

곡선 위에 실을 둘러 실의 길이를 측정한다.

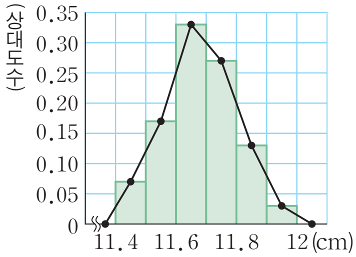
답안 예시2

곡선을 구간으로 쪼개어 생긴 각 부분을 직선으로 생각하여 길이를 측정한 후 합한다.

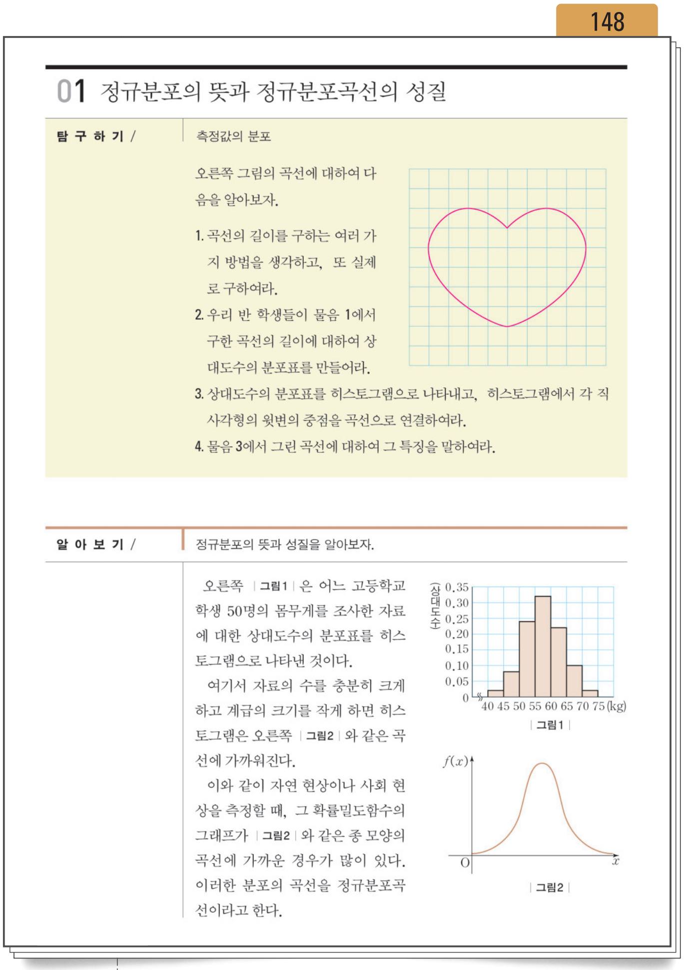
2. 답안 예시

실의 길이(cm)	학생 수(명)	상대도수
11.4이상 ~11.5미만	2	0.07
11.5 ~11.6	5	0.17
11.6 ~11.7	10	0.33
11.7 ~11.8	8	0.27
11.8 ~11.9	4	0.13
11.9 ~12.0	1	0.03
합계	30	1

3.



4. 종 모양의 곡선에 가깝다.



(오차)=(측정값)−(참값)이고, 참값은 고정된 값이므로 결국 오차의 분포는 측정값의 분포임을 알 수 있다.

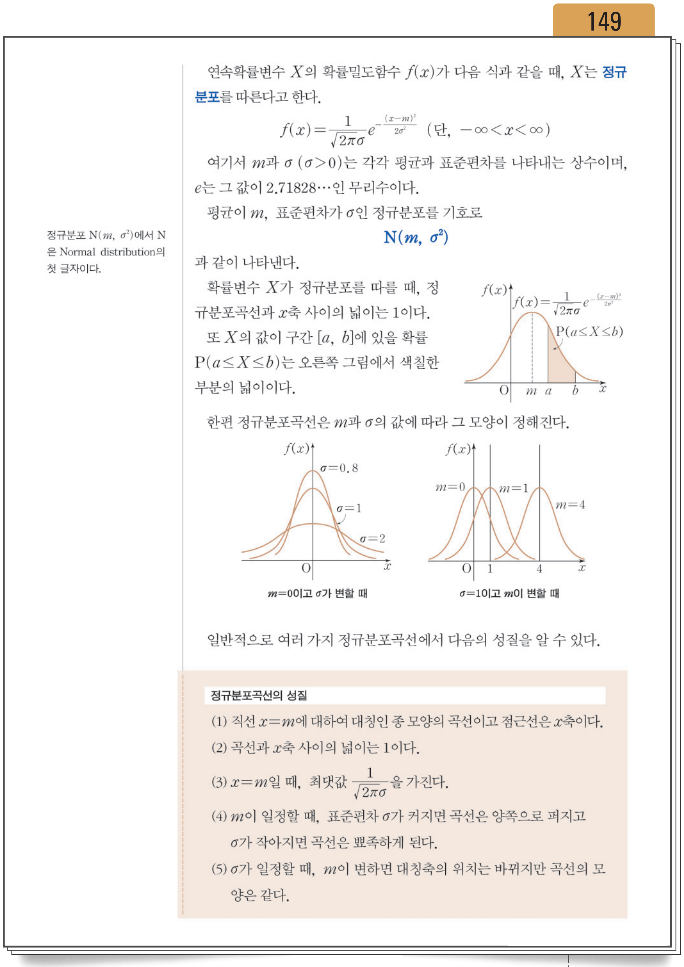
측정값의 분포를 알아볼 때, 측정값이 많을수록 더 좋은 결과를 얻을 수 있다.

알아보기 / 해설

- 관찰 또는 측정에는 항상 오차가 따른다. 이를테면 두 지점 사이의 거리를 측정할 때, 측정하는 사람에 따라서 결과에 약간의 차이가 있을 수 있고, 또 같은 사람이 측정하더라도 여러 번 측정하면 그때마다 결과가 달라질 수 있다.

- 과거에는 자료를 그림으로 나타내었을 때, 종 모양의 곡선이 나타나지 않으면 이것을 abnormal이라고 하였다.

이에 대하여 종 모양의 곡선으로 나타나는 자료를 normal이라고 생각한 것에서 정규분포(normal distribution)라는 이름이 유래되었다.



149

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 식과 같을 때, X는 **정규분포**를 따른다고 한다.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ (\text{단, } -\infty<x<\infty)$$

여기서 m과 σ ($\sigma>0$)는 각각 평균과 표준편차를 나타내는 상수이며, e는 그 값이 $2.71828\cdots$인 무리수이다.

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로

$$\mathbf{N}(m,\ \sigma^2)$$

과 같이 나타낸다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에서 N은 Normal distribution의 첫 글자이다.

확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

또 X의 값이 구간 $[a,\ b]$에 있을 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이이다.

한편 정규분포곡선은 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.

$m=0$이고 σ가 변할 때

$\sigma=1$이고 m이 변할 때

일반적으로 여러 가지 정규분포곡선에서 다음의 성질을 알 수 있다.

정규분포곡선의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고 점근선은 x축이다.

(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

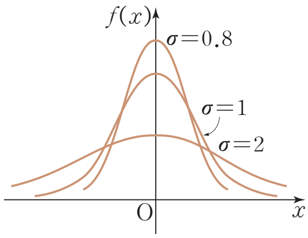
(3) $x=m$일 때, 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을 가진다.

(4) m이 일정할 때, 표준편차 σ가 커지면 곡선은 양쪽으로 퍼지고 σ가 작아지면 곡선은 뾰족하게 된다.

(5) σ가 일정할 때, m이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

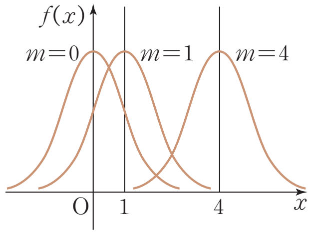
• 정규분포곡선은 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.

(i) $m=0$이고 σ가 변할 때



표준편차 σ는 자료들이 평균을 중심으로 흩어진 정도를 나타내므로 표준편차 σ가 커질수록 곡선의 높이는 낮아지고 양쪽으로 퍼지며, 표준편차 σ가 작아질수록 곡선의 높이는 높아지고 가운데로 몰린다.

(ii) $\sigma=1$이고 m이 변할 때



평균 m이 중심이므로 m이 변하면 곡선의 모양은 변하지 않고 대칭축의 위치만 바뀐다. 즉, 곡선만 좌우로 평행이동 한다.

참고 | 관찰오차의 이론-가우스 곡선

1800년대는 천문학, 측량학 등이 발달한 시기였다. 그 당시 유럽의 여러 나라에서는 각 국가의 넓이, 도시 사이의 거리 등 대규모 측량이 실시되었다. 여기서 동일 대상을 반복하여 측정할 때마다 결과가 다소 다르다는 것을 알게 되었는데, 이와 같은 경험에 의해서 '관찰오차의 이론'이 탄생되었다. 독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F. ; 1777~1855)는 관찰오차 이론의 선구자 중의 한 사람이다. 그는 관찰오차를 제거하는 계산 방법과 계측 대상의 실제값을 추계(일부를 가지고 전체를 미루어 계산함)하는 방법을 전개하였다. 이것은 대량 관찰에 있어서 계통적 인자와 우연적 인자를 명확하게 분리하는 최초의 시도였다.

가우스는 오차의 이론에서 출발하여, 정규곡선이 지니고 있는 실용적 가치를 밝혔다. 즉, 정규곡선의 측정값의 분포라든가 과학적 관찰에 수반되는 오차에 대하여 어떻게 잘 적합하는지를 보이고, 그 평균값, 확률오차 등의 기본적인 계산 방법을 고찰하였다. 그러므로 정규분포곡선을 가우스 곡선이라고 부르기도 한다.

알아보기 / 해설

표준정규분포는 평균이 0이므로 그 분포곡선 $y=f(z)$의 그래프는 직선 $z=0$에 대하여 대칭이다. 이 성질을 이용하면 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

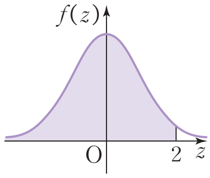
즉, 다음 성질을 이용한다.

(1) $\mathrm{P}(Z\le 0)=\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$

(2) $\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$

스스로 하기 / 풀이

1 (1)

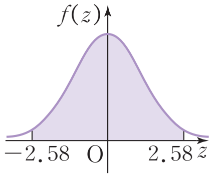


$\mathrm{P}(Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772=\mathbf{0.9772}$

(2)



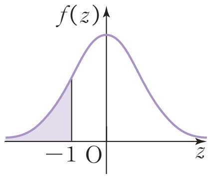
$\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)$

$=\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)$

$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)$

$=2\times 0.4951=\mathbf{0.9902}$

(3)



150

02 표준정규분포

알 아 보 기 / 표준정규분포의 뜻을 알아보자.

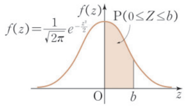
평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 하고, 기호로

N(0, 1)

과 같이 나타낸다.

확률변수 Z가 표준정규분포를 따르면 Z의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ (단, $-\infty<z<\infty$)



이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으며, 그 값은 부록의 표준정규분포표에 주어져 있다. 이를테면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$

표준정규분포표는 임의의 b에 대하여 $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$의 값을 나타낸다.

z	0	1	5	6	7
0.0	.0000	.0040	.0199	.0239	.0279
0.1	.0398	.0438	.0596	.0636	.0675
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	.4744	.4750	.4756
2.0	.4772	.4778	.4798	.4803	.4808

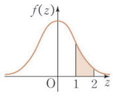
| 보기 | 확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때

(1) $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

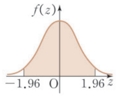


(2) $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)$

$=\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)$

$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$

$=2\times 0.4750=0.95$



스 스 로 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

$\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$

(1) $\mathrm{P}(Z\le 2)$ (2) $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)$

(3) $\mathrm{P}(Z\le -1)$ (4) $\mathrm{P}(Z\ge -1.96)$

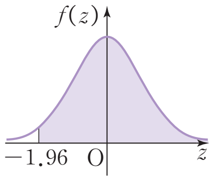
$\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413$

$=\mathbf{0.1587}$

(4)



$\mathrm{P}(Z\ge -1.96)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1.96)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$

$=0.5+0.4750$

$=\mathbf{0.9750}$

151

03 표준화

알 아 보 기 / 표준화의 뜻을 알아보고, 이를 활용하여 보자.

$E(Z)=E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$
$=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{m}{\sigma}=0$
$V(Z)=V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$
$=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=1$

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z의 평균과 분산은 각각 $E(Z)=0$, $V(Z)=1$이다. 즉, 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이와 같이 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 확률변수 X의 **표준화**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$에 대한 분포표가 주어져 있지 않으므로 표준화하여 확률을 구한다.

정규분포의 표준화

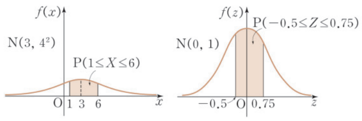
확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

| 보기 | 확률변수 X가 정규분포 $N(3,\ 4^2)$을 따를 때, $Z=\frac{X-3}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$1\le X\le 6 \Longleftrightarrow \frac{1-3}{4}\le\frac{X-3}{4}\le\frac{6-3}{4}$$
$$\Longleftrightarrow -0.5\le Z\le 0.75$$



$$\therefore P(1\le X\le 6)=P(-0.5\le Z\le 0.75)$$
$$=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 0.75)$$
$$=0.1915+0.2734$$
$$=0.4649$$

알아보기 / 해설

• 확률변수 $aX+b$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$
$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

그러므로 $E(X)=m$, $V(X)=\sigma^2$일 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$E(Z)=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{m}{\sigma}$$
$$=\frac{1}{\sigma}m-\frac{m}{\sigma}=0$$
$$V(Z)=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2V(X)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$$

• 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하는 이유는 다음과 같다.

정규분포를 따르는 확률변수 X는 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이를 이용하여 구한다. 그러나 m과 σ의 값에 따라 곡선의 모양이 달라지기 때문에 확률을 구하기 위해 그 넓이를 일일이 계산해야 하는 번거로움이 있다.

따라서 확률을 보다 쉽게 구하기 위해 하나의 기준을 정할 필요가 있었고 그것이 정규분포의 표준화인 것이다.

또한 정규분포를 따르는 확률변수를 표준화하면 여러 가지 확률변수를 비교할 때에도 편리하다.

보충 학습

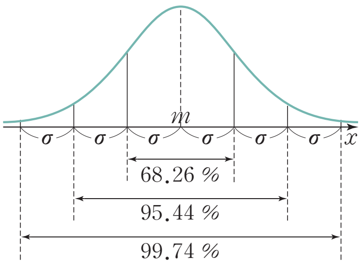
정규분포곡선의 성질

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 알 수 있다.

(i) $P(|X-m|<\sigma)=0.6826$

(ii) $P(|X-m|<2\sigma)=0.9544$

(iii) $P(|X-m|<3\sigma)=0.9974$



즉, 자료 전체의 약 68.26 %는 평균으로부터 $\pm\sigma$ 이내에 분포되어 있고, 약 95.44 %는 평균으로부터 $\pm 2\sigma$ 이내에 분포되어 있으며, 약 99.74 %는 평균으로부터 $\pm 3\sigma$ 이내에 분포되어 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-50}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(X\geq 50)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-50}{10}\geq\dfrac{50-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)=\mathbf{0.5}$

(2) $\mathrm{P}(60\leq X\leq 75)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{60-50}{10}\leq\dfrac{X-50}{10}\leq\dfrac{75-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(1\leq Z\leq 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4938-0.3413$

$=\mathbf{0.1525}$

(3) $\mathrm{P}(45\leq X\leq 65)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{45-50}{10}\leq\dfrac{X-50}{10}\leq\dfrac{65-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.1915+0.4332$

$=\mathbf{0.6247}$

(4) $\mathrm{P}(X<55)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-50}{10}<\dfrac{55-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z<0.5)$

$=0.5+0.1915$

$=\mathbf{0.6915}$

함 께 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

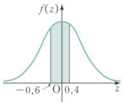
1 어떤 종류의 음료수 캔 300개 각각에 들어 있는 내용물의 용량은 평균이 190 mL, 표준편차가 5 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 약 몇 %인가?

(2) 용량이 193 mL 이상인 캔은 약 몇 개인가?

풀이

캔에 들어 있는 내용물의 용량을 확률변수 X (mL)라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(190,\ 5^2)$을 따른다. 여기서 $Z=\dfrac{X-190}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.



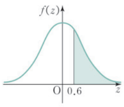
(1) $\mathrm{P}(187\leq X\leq 192)=\mathrm{P}(-0.6\leq Z\leq 0.4)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.4)$

$=0.2257+0.1554$

$=0.3811$

따라서 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 **약 38 %**이다.



(2) $\mathrm{P}(X\geq 193)=\mathrm{P}(Z\geq 0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)$

$=0.5-0.2257$

$=0.2743$

이때, $300\times 0.2743=82.29$이므로 용량이 193 mL 이상인 캔의 개수는 **약 82개**이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따를 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\geq 50)$ (2) $\mathrm{P}(60\leq X\leq 75)$

(3) $\mathrm{P}(45\leq X\leq 65)$ (4) $\mathrm{P}(X<55)$

2 어느 학교 학생 150명의 수학 성적은 평균이 60점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 성적이 52점 이상 70점 이하인 학생은 전체의 약 몇 %인가?

(2) 성적이 80점 이상인 학생은 약 몇 명인가?

2 각 학생의 수학 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{X-60}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(52\leq X\leq 70)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{52-60}{10}\leq Z\leq\dfrac{70-60}{10}\right)$

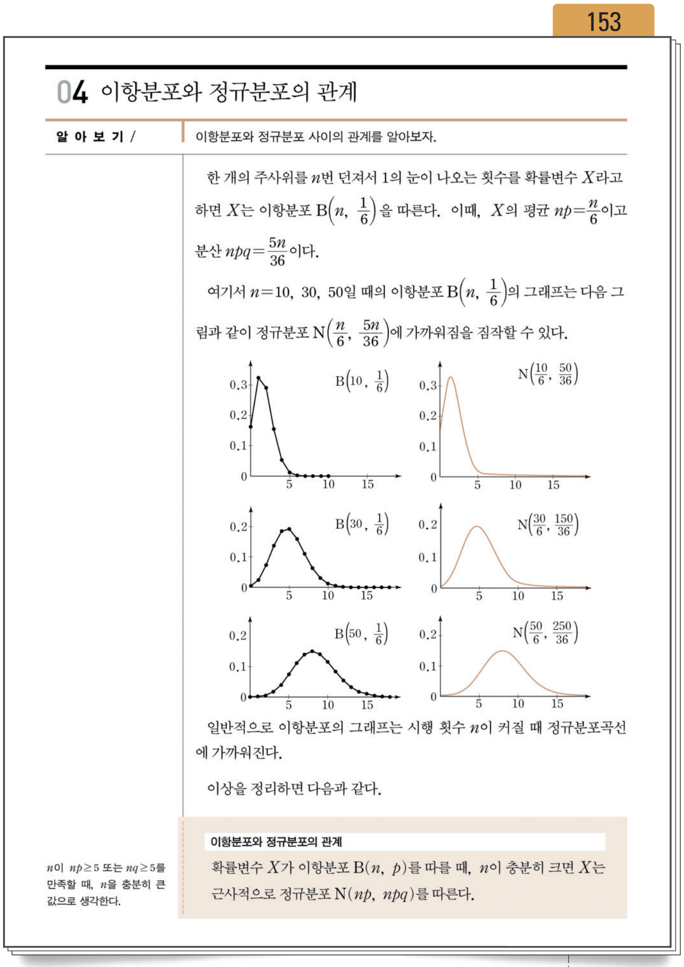
$=\mathrm{P}(-0.8\leq Z\leq 1)$

$=\mathrm{P}(-0.8\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.8)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.2881+0.3413=0.6294$

따라서 성적이 52점 이상 70점 이하인 학생은 전체의 약 **63** %이다.


153

04 이항분포와 정규분포의 관계

알아보기 / 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 알아보자.

한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다. 이때, X의 평균 $np=\frac{n}{6}$이고 분산 $npq=\frac{5n}{36}$이다.

여기서 $n=10,\ 30,\ 50$일 때의 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{6},\ \frac{5n}{36}\right)$에 가까워짐을 짐작할 수 있다.

일반적으로 이항분포의 그래프는 시행 횟수 n이 커질 때 정규분포곡선에 가까워진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.

n이 $np\geq5$ 또는 $nq\geq5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

(2) $\mathrm{P}(X\geq80)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{80-60}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

이때, $150\times0.0228=3.42$이므로 성적이 80점 이상인 학생은 **약 3명**이다.

알아보기 / 해설

• 이항분포와 정규분포의 관계에 의하여 n이 충분히 클 때, 이항분포에 대한 계산을 표준정규분포로 근사하여 구할 수 있다.

• 이항분포에서 시행 횟수 n이 커질 때 그 그래프는 정규분포곡선에 가까워진다. 이때, n이 충분히 크다는 것을 다음과 같이 판정한다.

(1) $p\leq0.5$일 때, $np\geq5$인 n이면 충분히 큰 것으로 생각한다.

(2) $p>0.5$일 때, $nq\geq5$인 n이면 충분히 큰 것으로 생각한다. (단, $q=1-p$)

참고 | 엑셀 프로그램을 이용하여 이항분포 그리기

엑셀 프로그램을 이용하여 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{6}\right)$의 그래프를 그려 보자.

1단계

A1 셀에 'x', B1 셀에 'P(X=x)'를 입력하고 A2 셀부터 A12 셀까지 각각 0부터 10까지 입력한다.

2단계

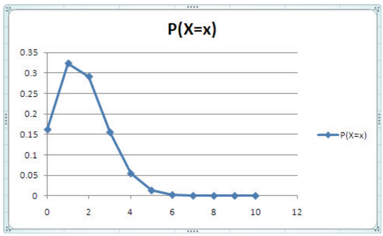
B2 셀에 '=BINOMDIST(A2,10,1/6,FALSE)'를 입력하여 $\mathrm{P}(X=0)$의 값을 구한다.

3단계

B2 셀의 오른쪽 하단에 마우스 포인터가 '+' 표시가 되도록 이동하여 마우스 좌측 버튼을 클릭한 후 B12 셀까지 마우스 끌기를 한다.

4단계

삽입 메뉴의 차트 영역에서 '분산형 아이콘' → '직선 및 표식이 있는 분산형 아이콘'을 선택한다.



알아보기 / 해설

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$$

이때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.

확률변수 X를 표준화하기 위하여 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이항분포에서 시행 횟수 n이 아주 큰 수이면 어떤 사건이 일어날 확률을 구하는 것이 쉽지 않다.

이를테면 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률, 즉 $\sum_{x=94}^{135} {}_{720}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{720-x}$을 구하는 것은 매우 어려운 일이다.

이와 같은 경우 정규분포를 이용하여 그 근삿값을 구할 수 있다.

또한 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$라고 하면 충분히 큰 n에 대하여 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때 $\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$이다.

함 께 하 기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 한 개의 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률을 구하여라.

풀이

한 개의 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120,\ \sigma(X)=\sqrt{720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=10$$

여기서 $n=720$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(94\le X\le 135)&=\mathrm{P}(-2.6\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.4953+0.4332\\&=\mathbf{0.9285}\end{aligned}$$

$n=720,\ p=\frac{1}{6}$에서 $np=120>5$ 이므로 이 n은 충분히 크다고 볼 수 있다.

$\mathrm{P}(94\le X\le 135)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{94-120}{10}\le Z\le\frac{135-120}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(-2.6\le Z\le 1.5)$

스 스 로 하 기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 122쪽

1 발아율이 80 %인 씨앗을 100개 뿌렸을 때, 다음을 구하여라.
(1) 발아한 씨앗이 80개 이상 92개 이하일 확률
(2) 발아한 씨앗이 90개 이상일 확률

스스로 하기 / 풀이

1 발아한 씨앗의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.8)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times 0.8=80$

$\mathrm{V}(X)=100\times 0.8\times 0.2=16$

$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

여기서 $n=100$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-80}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(80\le X\le 92)=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$
$=\mathbf{0.4987}$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 90)=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5-0.4938=\mathbf{0.0062}$

공학 도구 / 해설

• 교과서 142쪽의 함께하기 1을 엑셀 프로그램을 이용하여 구하여 보자.

$$\mathrm{P}(X\ge 81)=1-\mathrm{P}(X\le 80)$$

한편 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(82,\ 0.95)$를 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 80)$을 구하기 위하여 다음과 같이 엑

공학 도구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

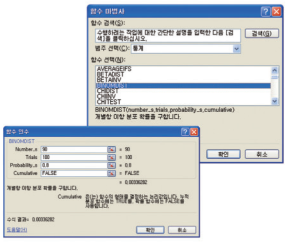
컴퓨터 프로그램을 이용한 확률 계산

1. 확률변수 X가 이항분포 $B(100,\ 0.8)$을 따를 때, 확률 $P(X=90)$을 구하여 보자.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭한다.

2단계 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'BINOMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭한다.

3단계 오른쪽 화면과 같이 대화 상자에서 Number_s에 90, Trials에 100, Probability_s에 0.8을 입력하고, Cumulative에 FALSE를 입력한 후 확인을 클릭한다.



$\therefore P(X=90)=0.00336282$

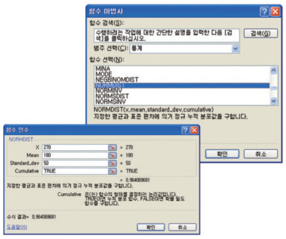
| 참고 | Cumulative에 TRUE를 입력하면 확률 $P(X\le 90)$을 구할 수 있다.

2. 확률변수 X가 정규분포 $N(180,\ 50^2)$을 따를 때, 확률 $P(X\le 270)$을 구하여 보자.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭한다.

2단계 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'NORMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭한다.

3단계 오른쪽 화면과 같이 대화 상자에서 X에 270, Mean에 180, Standard_dev에 50을 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한 후 확인을 클릭한다.



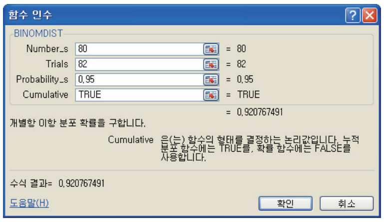
$\therefore P(X\le 270)=0.964069681$

| 참고 | 수식 입력창에 다음과 같이 입력하면 확률 $P(180\le X\le 230)$을 구할 수 있다.

=NORMDIST(230,180,50,TRUE)-NORMDIST(180,180,50,TRUE)

$\therefore P(180\le X\le 230)=0.341344746$

셀 프로그램의 'BINOMDIST' 대화 상자에서 Number_s에 80, Trials에 82, Probability_s에 0.95를 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한다.



$\therefore P(X\le 80)=0.920767491$

$\therefore P(X\ge 81)=1-P(X\le 80)$

$=1-0.920767491$

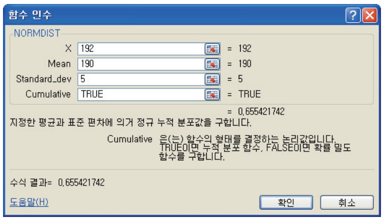
$=0.079232509$

•교과서 152쪽의 함께하기 1의 물음 (1)을 엑셀 프로그램을 이용하여 구하여 보자.

$P(187\le X\le 192)$

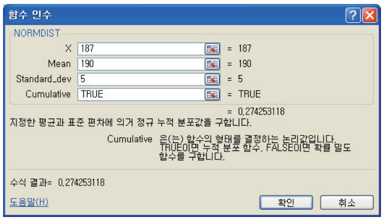
$=P(X\le 192)-P(X\le 187)$

한편 확률변수 X가 정규분포 $N(190,\ 5^2)$을 따르므로 $P(X\le 192)$를 구하기 위하여 다음과 같이 'NORMDIST' 대화 상자에서 X에 192, Mean에 190, Standard_dev에 5를 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한다.



$\therefore P(X\le 192)=0.655421742$

또 $P(X\le 187)$을 구하기 위하여 다음과 같이 'NORMDIST' 대화 상자에서 X에 187, Mean에 190, Standarddev에 5를 입력하고, Cumulative TRUE를 입력한다.



$\therefore P(X\le 187)=0.274253118$

$\therefore P(187\le X\le 192)$

$=P(X\le 192)-P(X\le 187)$

$=0.381168624$

•문제의 조건을 이용하여 구한 값과 엑셀 프로그램을 이용하여 구한 값은 반올림한 자리가 다르므로 오차가 생길 수 있다.

중단원 확인하기 / 풀이

156

중 단 원 확인하기

새로 나온 용어와 기호: 확률변수, 이산확률변수, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준화, 표준정규분포, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$

Ⅳ-1. 확률분포

이해

이산확률변수의 평균과 표준편차

1 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나오면 100원, 2의 눈이 나오면 200원, …, 6의 눈이 나오면 600원을 받는 게임에서 350원을 지불하고 주사위를 한 번 던질 때, 받는 금액에서 지불한 금액을 뺀 금액을 확률변수 X(원)라고 하자. X의 평균과 표준편차를 구하여라.

계산

확률밀도함수

2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax\ (0\le x\le 2)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 각각 구하여라.

(3) $\mathrm{P}(0.5\le X\le 1.5)$의 값을 구하여라.

의사소통

이항분포

3 어느 핸드볼 선수의 슛 성공률이 60 %라고 한다. 이 선수가 한 시합에서 10회의 슛을 시도할 때, 성공하는 횟수의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

문제 해결

정규분포의 활용

4 어떤 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게는 평균이 168.5 g, 표준편차가 5.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 포도 중 50송이를 조사할 때, 그 무게가 174 g 이상인 송이 수를 추측하여라. (단, 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)

문제 해결

이항분포와 정규분포의 관계

5 어떤 고등학교에서 근시인 학생의 비율이 전체의 40 %라고 한다. 이 학교의 학생 중 150명을 택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 근시인 학생이 72명 이상일 확률

(2) 근시인 학생이 54명 이상 72명 이하일 확률

---

1 주사위의 눈의 수와 받는 금액을 표로 나타내면 다음과 같다.

눈	1	2	3	4	5	6
금액(원)	100	200	300	400	500	600

받는 금액에서 지불한 금액을 뺀 금액이 확률변수 X이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-250	-150	-50	50	150	250	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)$

$=(-250)\times\frac{1}{6}+(-150)\times\frac{1}{6}$

$\quad+(-50)\times\frac{1}{6}+50\times\frac{1}{6}$

$\quad+150\times\frac{1}{6}+250\times\frac{1}{6}$

$=0$

$\mathrm{E}(X^2)=(-250)^2\times\frac{1}{6}+(-150)^2\times\frac{1}{6}$

$\qquad+(-50)^2\times\frac{1}{6}+50^2\times\frac{1}{6}$

$\qquad+150^2\times\frac{1}{6}+250^2\times\frac{1}{6}$

$\qquad=\frac{87500}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\frac{87500}{3}-0$

$\qquad=\frac{87500}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{87500}{3}}$

$\qquad=\frac{50\sqrt{105}}{3}$

따라서 X의 평균은 **0**, 표준편차는 $\mathbf{\frac{50\sqrt{105}}{3}}$이다.

2 (1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

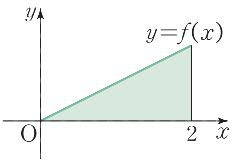
$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 ax\,dx=1$$

$$\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=1,\ 2a=1$$

$$\therefore a=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

| 다른 풀이 |

$f(x)$는 확률밀도함수이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 1이다.



$$\frac{1}{2}\times 2\times 2a=1$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x$이므로

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\int_0^2\frac{1}{2}x^3\,dx-\frac{16}{9}=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(3) $$\mathrm{P}(0.5\le X\le 1.5)=\int_{0.5}^{1.5}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0.5}^{1.5}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

3 이 핸드볼 선수의 슛 성공 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ 0.6)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=10\times0.6=\mathbf{6}$$

$$\mathrm{V}(X)=10\times0.6\times0.4=\mathbf{2.4}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\mathbf{\sqrt{2.4}}$$

4 이 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(168.5,\ 5.5^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{X-168.5}{5.5}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 포도 한 송이의 무게가 174 g 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge174)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{174-168.5}{5.5}\right)=\mathrm{P}(Z\ge1)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.5-0.3413=0.1587$$

이때, $50\times0.1587=7.935$이므로 포도 50송이 중 무게가 174 g 이상인 것은 **약 8송이**이다.

5 근시인 학생의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{2}{5}=60$$

$$\sigma(X)=\sqrt{150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}=6$$

이때, $n=150$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{X-60}{6}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $$\mathrm{P}(X\ge72)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{72-60}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.5-0.4772=\mathbf{0.0228}$$

(2) $$\mathrm{P}(54\le X\le72)=\mathrm{P}\left(\frac{54-60}{6}\le Z\le\frac{72-60}{6}\right)=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.3413+0.4772=\mathbf{0.8185}$$

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.254

01 바탕

검은 공 3개, 흰 공 3개가 들어 있는 상자에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

02 바탕

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax^3\ (0\le x\le 1)$일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

03 기본

확률분포가 오른쪽 표와 같은 확률변수 X의 평균이 -1일 때, X의 분산은?

X	$-a$	0	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	b	1

① -11　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 11

04 바탕

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=\sqrt{15}$, $\mathrm{E}(X^2)=96$일 때, X의 표준편차 $\sigma(X)$의 값은?

① 4　② 9　③ 10　④ 15　⑤ 18

05 기본

연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\ (0\le x\le 4)$$

일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

06 기본

500원짜리 동전 2개를 동시에 던지는 시행에서 앞면이 나오는 동전을 상금으로 갖는다고 한다. 상금의 액수를 확률변수 X라고 할 때, 확률변수 $2X+300$의 평균은?

① 300 ② 800 ③ 1300 ④ 1800 ⑤ 2300

07 바탕

타율이 2할인 야구 선수가 4번의 타석에서 세 번 이상 안타를 칠 확률은?

① 0.0272 ② 0.2723 ③ 0.4435 ④ 0.7319 ⑤ 0.9164

08 기본

5 %의 불량률로 제품을 생산하는 기계에서 임의로 100개의 제품을 생산할 때, 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 노란 공이 나올 확률이 $\frac{x}{x+4}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

09 실력

노란 공이 x개, 파란 공이 4개 들어 있는 주머니에서 공을 1개 꺼내어 보고 다시 넣는 시행을 n번 반복할 때, 노란 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균은 12이고, 분산은 3일 때, $x+n$의 값을 구하여라.

10 기본

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 20^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(X\le 80)$을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z|\le 1)=0.6826$)

11 실력

오른쪽 표는 국어, 영어, 수학 성적에 대한 어떤 학급 전체 학생의 평균과 표준편차를 나타낸 표이다. 세린이의 국어, 영어, 수학 성적이 각각 85, 82, 92일 때, 학급 성적과 비교하여 3과목 중 상대적으로 성적이 좋은 과목부터 순서대로 나열하여라.

과목	국어	영어	수학
평균	70	74	76
표준편차	15	16	18

(단, 이 학급의 성적은 정규분포를 따른다.)

합격자의 최저 점수를 k라고 하면 $\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{350}{5000}$임을 이용한다.

12 실력

350명의 신입 사원을 선발하는 어느 회사의 입사 시험에 5000명이 응시하였다. 응시자의 성적은 평균이 700점, 표준편차가 40점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

2 통계적 추정

이 단원을 배우면

- 모집단과 표본의 뜻을 알 수 있다.
- 표본평균과 모평균의 관계를 이해할 수 있다.
- 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
- 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

1 표본조사와 표본평균의 분포
2 모평균과 모비율의 추정

소단원의 학습 목표

1. 모집단과 표본의 뜻을 안다.
2. 전수조사와 표본조사의 뜻을 안다.
3. 임의추출의 뜻을 알고, 그 방법을 이해한다.
4. 모평균, 모분산, 모표준편차의 뜻을 안다.
5. 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 뜻을 안다.
6. 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 이해한다.
7. 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, $\overline{X}$

158

2 통계적 추정

1 표본조사와 표본평균의 분포

학습 목표

- 모집단, 표본 및 임의추출의 뜻을 안다.
- 모평균, 모분산, 모표준편차의 뜻을 안다.
- 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 뜻을 안다.
- 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.

다 가 서 기 / 통계적 사고방식

이 이야기의 주인공은 백사 이항복(1556~1618) 선생이다. 백사는 임진왜란 당시 임금을 보좌하고 백성을 잘 보살펴 국난 극복에 큰 공을 세웠다.

한 섬=열 말
한 말=열 되
한 되=열 홉

한 섬에 가득 들어 있는 콩의 개수를 일일이 세기는 어렵다. 그러나 한 홉의 콩의 개수를 세는 데는 5분도 걸리지 않는다.

한 홉에 들어 있는 콩의 개수가 500개이면 한 섬에 들어 있는 콩의 개수는 $500\times10\times10\times10=500000$(개)임을 유추할 수 있다.

이와 같이 전체를 다 조사하지 않고 일부분만 조사하여 전체를 예측하는 것을 통계적 사고방식이라고 할 수 있다.

다가서기 / 해설

섬, 말, 되, 홉은 우리나라에서 전통적으로 써온 부피의 단위로 한 되는 열 홉, 한 말은 열 되, 한 섬은 열 말이다. 즉,

1(되)$=10$(홉)

1(말)$=10$(되)$=10\times10$(홉)

1(섬)$=10$(말)$=10\times10$(되)$=10\times10\times10$(홉)

한 홉에 들어 있는 콩의 개수가 500개이면 한 섬에 들어 있는 콩의 개수는

$500\times10\times10\times10=500000$(개)임을 유추할 수 있다.

이때, 콩 1개를 세는 데 0.5초가 걸리고, 어떤 수에 10을 곱하는 데 3초가 걸린다고 하면

한 섬에 들어 있는 콩의 개수를 세는 데 걸리는 시간은

$500000\times0.5=250000$(초)

한 홉에 들어 있는 콩의 개수를 센 후 그 수에 10을 세 번 곱하는 데 걸리는 시간은

$500\times0.5+3+3+3=259$(초)

따라서 한 홉에 들어 있는 콩의 개수를 센 후 그 수에 10을 세 번 곱하는 데 걸리는 시간이 빠르다는 것을 알 수 있다.

이와 같이 전체를 일일이 조사하는 것보다는 일부분을 조사하여 전체를 예측하는 것이 더 쉽고 빠르다.

159

01 표본조사

탐 구 하 기 / 합리적인 설문 조사 방법

개교기념일 행사에 대한 전교생의 의견을 알아보기 위하여 100명을 뽑아 설문 조사를 하려고 한다. 다음 중 어느 것이 더 합리적인 방법인지 택하고, 그 이유를 말하여 보자.

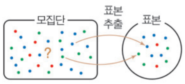
1. 특정 학년에서만 뽑는다.
2. 각 학년에서 골고루 뽑는다.

알 아 보 기 / 모집단과 표본의 뜻을 알아보자.

어떤 지역의 가구당 교육비를 알고 싶을 때, 이 지역의 모든 가구를 방문하여 교육비를 조사하면 그 상태를 알 수 있다. 이와 같이 조사의 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라고 한다. 전수조사의 대표적인 예로는 인구 조사가 있다.

통계조사
- 전수조사(全數調査)
- 표본조사(標本調査)

반면에 어떤 지역에서 100가구를 택하여 교육비를 알아보고, 그 결과에서 전체 가구의 교육비를 추측할 수도 있다. 이와 같이 모집단의 일부를 추출한 부분집합을 **표본**이라 하고, 표본을 조사하는 것을 **표본조사**라고 한다.



또 추출된 표본의 개수를 표본의 크기라고 한다.

우리나라에서는 인구 조사를 매 5년마다 실시한다.

전구의 수명을 조사할 때, 전수조사를 하면 검사가 끝난 전구는 못 쓰게 되므로 표본조사를 한다.

일반적으로 전수조사는 표본조사에 비하여 시간과 비용이 많이 들고, 전수조사가 불가능한 경우도 있으므로 특별한 경우를 제외하고는 전수조사보다 표본조사를 많이 한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

1. 전수조사와 비교하여 표본조사의 장점을 말하여라.

탐구하기 / 풀이

각 학년에서 골고루 뽑는 것이 특정 학년에서만 뽑는 것보다 합리적이다. 그 이유는 골고루 뽑는 것이 전체 의견을 더 잘 수렴할 수 있기 때문이다.
따라서 2의 방법이 1의 방법보다 더 합리적이다.

알아보기 / 해설

• 통계에서 중요한 용어가 2개 있는데 모집단과 표본이 바로 그것이다. 모집단(母集團, population)은 관심 또는 연구하고자 하는 대상 전체를 말하고, 표본(標本, sample)은 모집단을 알아보기 위하여 모집단에서 추출한 일부분을 말한다.

예를 들어 한국의 고등학교 2학년 학생들의 통계 실력을 알아보고 싶을 때, 모집단은 한국의 고등학교 2학년 학생 전체이다. 그런데 이들을 모두 모아서 실력을 테스트하려면 시간과 경비가 매우 많이 든다. 따라서 몇 개의 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 실력을 테스트한다. 이때, 뽑힌 고등학교 2학년 학생들이 표본이 된다.
한편 우리 학교 2학년 학생들의 통계 실력을 알아보고 싶다면 모집단은 우리 학교 2학년 학생 전체이다. 이때는 모집단 전체를 조사하는 전수조사를 하여도 되고, 2학년 각 반에서 몇 명씩 택하여 조사하는 표본조사를 하여도 된다.

• 조사를 하고 나면 그 물건을 다시 쓰지 못하는 경우가 있다.
예를 들어 전구의 수명 시간을 조사한다던지, 불꽃놀이 용품에서 불량품을 골라내는 것 등은 모든 제품을 조사하고 나면 실제로 판매할 상품은 없어지게 된다. 이와 같은 조사를 파괴검사라고 하는데 이 경우에는 표본조사를 하여야 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 ① 시간이 절약된다.
② 경비가 절감된다.
③ 한 번 검사하면 파괴되어서 그 물건을 못 쓰게 되는 검사, 이를테면 전구의 수명 시간에 대한 조사와 같은 경우에도 가능하다.

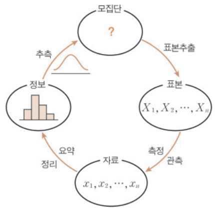
알아보기 / 해설

- 통계 조사의 목적은 모집단의 성질을 알고 정확한 상황을 파악하기 위한 것이다.
  알고자 하는 성질에 따라서 전수조사를 할 수도 있고 표본조사를 할 수도 있다. 모집단 전체를 알고자 전수조사를 한다고 해서 반드시 정확한 것은 아니다.
  이를테면 조사 자체에서 오류가 일어날 수도 있다.
  표본조사의 경우에는 다음 사항이 특히 중요하다.
  (1) 표본에 모집단의 성질이 잘 반영되어야 한다.
  (2) 표본을 뽑는 방법이 적절하여야 한다.
- 임의추출은 조사자의 주관에 따르지 않고, 각 원소가 택하여 질 확률이 서로 같게 추출하는 것으로 무작위추출이라고도 한다.
  임의추출에 대비되는 개념이 유의추출인데, 이것은 조사자가 자기의 경험에 의해서 가장 대표적이라고 생각되는 원소를 골라서 뽑는 방식이다.

160

알 아 보 기 / 임의추출의 뜻을 알아보자.

표본조사의 목적은 표본에서 얻은 정보를 바탕으로 모집단의 성질을 추측하는 데 있다. 따라서 모집단의 특징이 잘 반영되도록 표본을 택하는 것이 중요하다.



이를 위해서는 추출되는 표본이 모집단의 어느 한 부분에 편중되지 않아야 한다. 즉, 모집단의 각 원소가 같은 확률로 추출되어야 한다.

앞으로 특별한 언급이 없으면 표본은 임의표본을 뜻한다.

이와 같은 추출법을 **임의추출**이라 하고, 임의추출된 표본을 임의표본이라고 한다.

표본을 추출하는 데에는 한 번 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 복원추출과 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 비복원추출이 있다.

모집단의 크기가 충분히 큰 경우에는 비복원추출도 복원추출로 볼 수 있다.

난수주사위
0에서 9까지의 숫자를 각각 두 번 사용하여 정이십면체의 각 면에 숫자 하나씩을 새긴 주사위이다.

모집단에서 표본을 임의추출하는 방법으로는 제비뽑기, 난수주사위 사용하기, 난수표 사용하기 등이 있다.

그러나 공학 도구가 발전된 요즈음에는 계산기, 컴퓨터 소프트웨어를 많이 사용한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

2 숫자 1, 2, 3이 각각 적힌 3개의 공이 들어 있는 주머니에서 공 2개를 복원추출하는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라.

3 위의 스스로 하기 **2**에서 다음과 같이 추출하는 경우의 수를 구하여라.
(1) 비복원으로 2개를 추출한다.
(2) 동시에 2개를 추출한다.

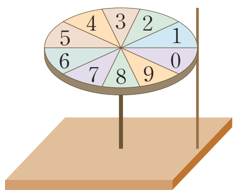
스스로 하기 / 풀이

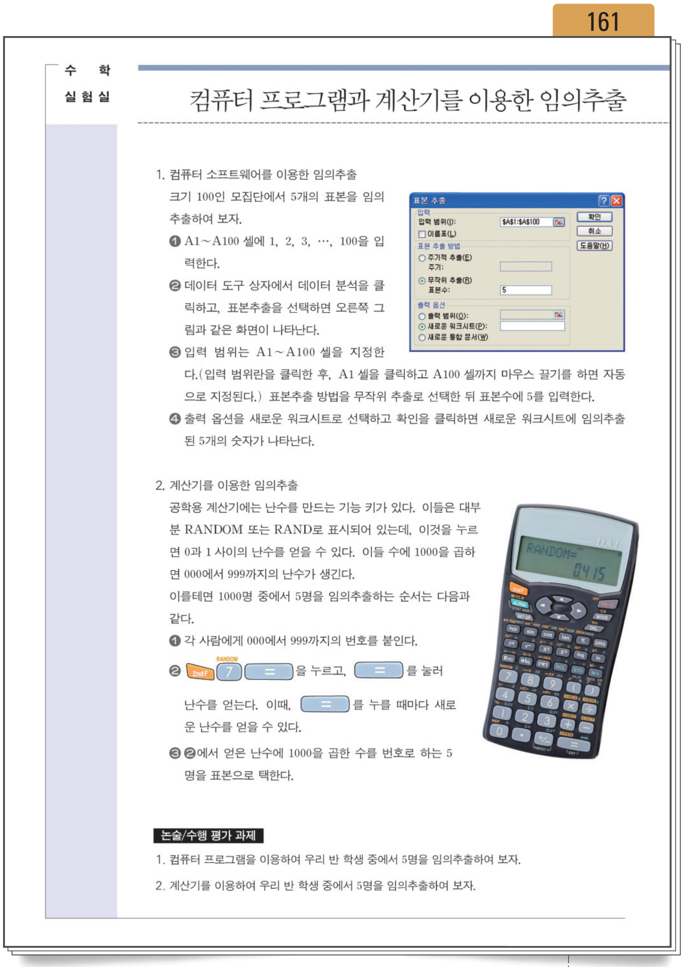
2 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 것이 복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$3\times3=\mathbf{9}$(가지)

3 (1) 추출된 원소를 다시 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 것이 비복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$3\times2=\mathbf{6}$(가지)
(2) ${}_3C_2=\mathbf{3}$(가지)

참고 | 난수표

난수표를 최초로 만든 사람은 팁페트(1927)인데, 그 후 여러 종류가 나왔다. KS 난수표는 우리나라 최초로 1963년 박한식 교수가 만든 것이다.
KS 난수표의 숫자의 개수는 40000개 정도이고, 이 난수표를 만들 당시 우리나라에는 전자계산기가 없었기 때문에 다음 그림과 같은 룰렛을 돌려서 나온 숫자를 하나씩 기록하여 만들었다.





161

수학 실험실

컴퓨터 프로그램과 계산기를 이용한 임의추출

1. 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 임의추출

크기 100인 모집단에서 5개의 표본을 임의추출하여 보자.

❶ A1~A100 셀에 1, 2, 3, …, 100을 입력한다.

❷ 데이터 도구 상자에서 데이터 분석을 클릭하고, 표본추출을 선택하면 오른쪽 그림과 같은 화면이 나타난다.

❸ 입력 범위는 A1~A100 셀을 지정한다.(입력 범위란을 클릭한 후, A1 셀을 클릭하고 A100 셀까지 마우스 끌기를 하면 자동으로 지정된다.) 표본추출 방법을 무작위 추출로 선택한 뒤 표본수에 5를 입력한다.

❹ 출력 옵션을 새로운 워크시트로 선택하고 확인을 클릭하면 새로운 워크시트에 임의추출된 5개의 숫자가 나타난다.

2. 계산기를 이용한 임의추출

공학용 계산기에는 난수를 만드는 기능 키가 있다. 이들은 대부분 RANDOM 또는 RAND로 표시되어 있는데, 이것을 누르면 0과 1 사이의 난수를 얻을 수 있다. 이들 수에 1000을 곱하면 000에서 999까지의 난수가 생긴다.

이를테면 1000명 중에서 5명을 임의추출하는 순서는 다음과 같다.

❶ 각 사람에게 000에서 999까지의 번호를 붙인다.

❷ 2ndF RANDOM 7 = 을 누르고, = 를 눌러 난수를 얻는다. 이때, = 를 누를 때마다 새로운 난수를 얻을 수 있다.

❸ ❷에서 얻은 난수에 1000을 곱한 수를 번호로 하는 5명을 표본으로 택한다.

논술/수행 평가 과제

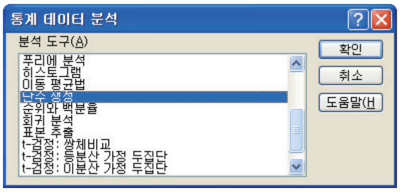
1. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 우리 반 학생 중에서 5명을 임의추출하여 보자.
2. 계산기를 이용하여 우리 반 학생 중에서 5명을 임의추출하여 보자.

논술/수행 평가 과제 / 해설

우리 반 학생이 34명이라고 하면

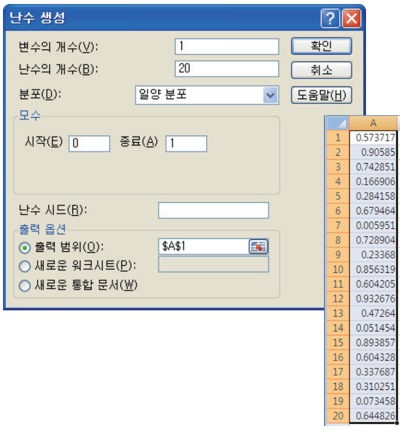
1. ❶ 34명의 각 사람에게 00에서 33까지의 번호를 붙인다.

❷ 엑셀 프로그램의 데이터 메뉴에서 '데이터 분석'을 선택하면 다음과 같은 화면이 나타난다.



여기서 '난수 생성'을 선택하고, 확인을 클릭한다.

❸ 난수 생성 대화 상자에서 변수의 개수에 1, 난수의 개수에 20을 입력하고, 분포는 일양분포를 선택한다.



	A
1	0.573717
2	0.90585
3	0.742851
4	0.166906
5	0.284158
6	0.679464
7	0.005951
8	0.728904
9	0.23368
10	0.856319
11	0.604205
12	0.932676
13	0.47264
14	0.051454
15	0.893857
16	0.604328
17	0.337687
18	0.310251
19	0.073458
20	0.644826

❹ 난수를 만든 다음 100을 곱하여 소수점 아래를 버린 수 중 33보다 큰 수는 지우고, 남은 수 중에서 앞에서부터 다섯째 수까지 택한다.

~~57~~, ~~90~~, ~~74~~, 16, 28, ~~67~~, 00, ~~72~~, 23, ~~85~~, ~~60~~, ~~93~~, ~~47~~, 05, ~~89~~, ~~60~~, 33, 31, 07, ~~64~~

❺ ❹의 결과 택해진 수 16, 28, 00, 23, 05를 번호로 하는 학생을 표본으로 택한다.

2. ❶ 우리 반 학생들에게 00에서 33까지의 번호를 붙인다. 이때, 기존의 학생 번호 1, 2, …, 32, 33, 34를 각각 01, 02, …, 32, 33, 00으로 한다.

❷ 계산기를 이용하여 얻은 난수에 1000을 곱하여 세 자리 수를 만들고 이 중에서 십의 자리와 일의 자리만 택한다.

❸ 예를 들어 ❷의 결과가 80, 22, 62, 19, 70, 14, 31, 76, 02, …로 나왔다면 앞에서부터 차례로 33 이하인 5개의 수 22, 19, 14, 31, 02를 번호로 하는 학생을 표본으로 택한다.

알아보기 / 해설

• 다음 그림과 같이 주머니에 1, 2, …, 9, 10까지 쓰여진 숫자 카드가 들어있다고 가정하고, 이들을 모집단이라고 하자.

여기서 모평균, 모분산, 모표준편차는 각각 다음과 같다.

$$m=5.5,\ \sigma^2=8.25,\ \sigma=\sqrt{8.25}$$

만약 이 주머니에서 카드 3장을 복원추출하여 그 숫자를 조사할 때, 그 경우의 수는

${}_{10}\Pi_3=10^3=1000$(가지)

이다.

(1) 표본으로 1, 1, 1이 택해졌다면

$$\overline{X}=1,\ S^2=0,\ S=0$$

(2) 표본으로 5, 7, 9가 택해졌다면

$$\overline{X}=7,\ S^2=4,\ S=2$$

⋮

이와 같이 표본으로 무엇이 택해졌느냐에 따라 $\overline{X}$, S^2, S의 값은 여러 가지 값을 가지게 된다.
따라서 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 확률변수임을 이해하여야 한다.

• 자료 x_1, x_2, …, x_n이 모집단 전체일 때, 모분산은

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\ \left(\text{단, } \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

이지만, 자료 X_1, X_2, …, X_n이 어떤 모집단에서 추출된 표본이면, 그 표본분산은

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$\left(\text{단, } \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

이다.

162

02 표본평균의 뜻

알 아 보 기 / 표본평균의 뜻을 알아보자.

모집단에서 조사의 대상이 되는 특성을 나타내는 확률변수를 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

표본은 확률변수이므로 대문자 X_1, X_2, …, X_n으로 나타낸다.

한편 어떤 모집단에서 크기 n인 표본 X_1, X_2, …, X_n을 임의추출하였을 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 각각 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다.

$$\text{표본평균: } \overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\text{표본분산: } S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ \text{표본표준편차: } S=\sqrt{S^2}$$

표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다.

| 보기 | 1, 2, 3, …, 9, 10으로 구성된 모집단을 생각하고 1개의 숫자를 임의추출할 때, 나오는 숫자를 확률변수 X라고 하면

$m=\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots+10)$
$=5.5$
$\sigma^2=\frac{1}{10}\{(1-5.5)^2+(2-5.5)^2+\cdots+(10-5.5)^2\}$
$=8.25$

(1) 모평균: $m=5.5$, 모분산: $\sigma^2=8.25$, 모표준편차: $\sigma=\sqrt{8.25}$

(2) 표본으로 2, 6, 7이 택해졌다면

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{3}(2+6+7)=5$

S^2의 값: $\frac{1}{3-1}\{(2-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2\}=7$

S의 값: $\sqrt{7}$

(3) 표본으로 3, 4, 5가 택해졌다면

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{3}(3+4+5)=4$

S^2의 값: $\frac{1}{3-1}\{(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2\}=1$

S의 값: 1

(2), (3)과 같이 $\overline{X}$, S^2, S는 표본에 따라 다른 값을 가지는 확률변수이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

1 크기가 5인 표본 1, 3, 5, 7, 9에 대하여 표본평균, 표본분산 및 표본표준편차의 값을 각각 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

1 $\overline{X}$의 값:

$$\frac{1}{5}(1+3+5+7+9)=\frac{1}{5}\times25$$
$$=\mathbf{5}$$

S^2의 값:

$$\frac{1}{5-1}\{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}\times40=\mathbf{10}$$

S의 값: $\sqrt{\mathbf{10}}$

03 표본평균의 분포

알 아 보 기 / 표본평균의 분포를 살펴보고, 표본평균과 모평균의 관계를 알아보자.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

숫자 2, 4, 6, 8이 각각 적힌 4개의 공을 모집단으로 생각하고 1개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하면

$$m=5,\ \sigma^2=5,\ \sigma=\sqrt{5}$$

여기서 크기 $n=2$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1, X_2라고 하자. 이때, 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$는 X_1, X_2의 값에 따라 다른 값을 가지는 확률변수이다.

$X_1 \backslash X_2$	2	4	6	8
2	2	3	4	5
4	3	4	5	6
6	4	5	6	7
8	5	6	7	8

표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$는 확률변수이고 $\overline{x}$는 $\overline{X}$를 측정하여 얻은 값이다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}$$

이것을 m과 σ로 나타내면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

임을 알 수 있다.

같은 방법으로 크기 $n=3$인 표본 X_1, X_2, X_3을 택하고, 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}=\frac{8}{3}$인 경우의 수는
$X_1=2,\ X_2=2,\ X_3=4$
$X_1=2,\ X_2=4,\ X_3=2$
$X_1=4,\ X_2=2,\ X_3=2$
의 3가지이다.

$\overline{X}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	$\frac{22}{3}$	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

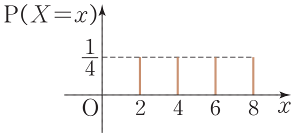
$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}$$

즉, $\mathrm{E}(\overline{X})=5=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}=\frac{\sigma^2}{n}$임을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

숫자 2, 4, 6, 8이 각각 적힌 4개의 공을 모집단으로 생각하고, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 할 때, X의 분포를 표와 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1



이 확률분포에서 평균 m과 분산 σ^2을 구하면

$$m=2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4}=5$$

$$\sigma^2=2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}+6^2\cdot\frac{1}{4}+8^2\cdot\frac{1}{4}-5^2=5$$

여기에서 크기 $n=2$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1과 X_2라고 할 때, X_1과 X_2가 가질 수 있는 값이 각각 2, 4, 6, 8이므로 전체 경우의 수는

$${}_4\Pi_2=4^2=16(\text{가지})$$

여기서 $\overline{X}=k$ ($k=2,\ 3,\ \cdots,\ 8$)가 되는 경우는 다음과 같다.

$\overline{X}$	$(X_1,\ X_2)$의 쌍	경우의 수
2	(2, 2)	1
3	(4, 2), (2, 4)	2
4	(6, 2), (4, 4), (2, 6)	3
5	(8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)	4
6	(8, 4), (6, 6), (4, 8)	3
7	(8, 6), (6, 8)	2
8	(8, 8)	1
전체 경우의 수		16

따라서 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 나타낸 표를 이용하여 평균과 분산을 각각 구하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{8}+\cdots+8\cdot\frac{1}{16}$$
$$=5$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\cdot\frac{1}{16}+3^2\cdot\frac{1}{8}+\cdots+8^2\cdot\frac{1}{16}-5^2$$
$$=\frac{5}{2}$$

표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산을 X의 평균, 분산과 비교해 보면 표본평균 $\overline{X}$의 평균은 모평균과 같고, 표본평균 $\overline{X}$의 분산 $\frac{5}{2}$는 모분산 5를 표본의 크기 2로 나눈 것과 같음을 알 수 있다.

크기 $n=3$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1, X_2, X_3이라고 할 때, X_1, X_2, X_3이 가질 수 있는 값이 각각 4가지씩이므로 전체 경우의 수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64(\text{가지})$$

여기서 $\overline{X}=\frac{k}{3}(X_1+X_2+X_3=k$, $k=6,\ 8,\ \cdots,\ 22,\ 24)$가 되는 경우는 다음과 같다.

$\overline{X}$	$(X_1,\ X_2,\ X_3)$의 쌍	경우의 수
2	(2, 2, 2)	1
$\frac{8}{3}$	(2, 2, 4), (2, 4, 2), (4, 2, 2)	3
$\frac{10}{3}$	(2, 2, 6), (2, 6, 2), (6, 2, 2), (2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2)	6
4	2, 2, 8의 순열: 3가지 2, 4, 6의 순열: 6가지 4, 4, 4의 순열: 1가지	10
$\frac{14}{3}$	2, 4, 8의 순열: 6가지 2, 6, 6의 순열: 3가지 4, 4, 6의 순열: 3가지	12
$\frac{16}{3}$	2, 6, 8의 순열: 6가지 4, 4, 8의 순열: 3가지 4, 6, 6의 순열: 3가지	12
6	2, 8, 8의 순열: 3가지 4, 6, 8의 순열: 6가지 6, 6, 6의 순열: 1가지	10
$\frac{20}{3}$	(4, 8, 8), (8, 4, 8), (8, 8, 4), (6, 6, 8), (6, 8, 6), (8, 6, 6)	6
$\frac{22}{3}$	(6, 8, 8), (8, 6, 8), (8, 8, 6)	3
8	(8, 8, 8)	1
	전체 경우의 수	64

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 분포를 나타낸 표를 이용하여 평균과 분산을 구하면 각각 다음과 같다.

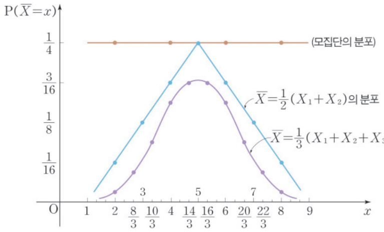
$$\mathrm{E}(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{64}+\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{64}+\cdots+8\cdot\frac{1}{64}=5=m$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\cdot\frac{1}{64}+\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{64}+\cdots+8^2\cdot\frac{1}{64}-5^2$$

$$=\frac{5}{3}=\frac{\sigma^2}{n}$$

164

앞의 모집단의 분포와 크기 $n=2$ 및 $n=3$인 표본평균의 분포를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 다음과 같다.

모집단이 충분히 크면 비복원추출일 때에도 오른쪽의 성질은 성립한다.

표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 임의표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 모집단의 분포가 정규분포이면 $\overline{X}$는 n의 크기에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(3) 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

스 스 로 하 기 /

익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

1 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 36)$을 따르는 모집단에서 크기 $n=16$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

2 모평균이 6, 모표준편차가 3인 모집단에서 크기 $n=100$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 말하여라.

스스로 하기 / 풀이

1 $m=5$, $\sigma=6$, $n=16$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathbf{5}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{16}}$

$=\mathbf{\frac{3}{2}}$

2 $m=6$, $\sigma=3$, $n=100$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=6$

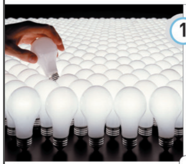
$\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}$

따라서 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 정규분포

$\mathbf{N\left(6,\ \frac{9}{100}\right)}$를 따른다.

165

함께하기 / 익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽



1 어느 회사에서 생산하는 전구의 수명 시간 X의 분포는 평균이 2000시간, 표준편차가 200시간인 정규분포를 따른다고 한다. 400개의 전구를 임의추출하여 수명 시간을 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하일 확률

(2) 표본평균이 1980시간 이하일 확률

풀이

$m=2000$, $\sigma=200$, $n=400$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=2000,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{200}{20}=10$$

인 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{\overline{X}-2000}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하인 경우는 $1990 \le \overline{X} \le 2010$일 때이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1990 \le \overline{X} \le 2010) &= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)\\ &= 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\ &= 2\times 0.3413\\ &= \mathbf{0.6826}\end{aligned}$$

(2) 표본평균이 1980시간 이하인 경우는 $\overline{X} \le 1980$일 때이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X} \le 1980) &= \mathrm{P}(Z \le -2) = \mathrm{P}(Z \ge 2)\\ &= 0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\ &= 0.5-0.4772\\ &= \mathbf{0.0228}\end{aligned}$$

스스로 하기 / 익힘책 127쪽 | 익힘책 128쪽 | 익힘책 129쪽

3 어느 지역의 가구당 한 달 수입액 X의 분포는 평균이 300만 원, 표준편차가 10만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 가구 중 다음과 같은 크기의 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 302만 원 이상이 될 확률을 각각 구하여라.

(1) $n=25$ (2) $n=100$ (3) $n=225$

함께하기 / 해설

1 표본의 크기 $n=100$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 20^2)$을 따르고 $Z=\dfrac{\overline{X}-2000}{20}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1990 \le \overline{X} \le 2010) &= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0.5)\\ &= 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)\\ &= 2\times 0.1915\\ &= 0.383\end{aligned}$$

따라서 표본의 크기 $n=400$인 경우보다 확률이 낮아짐을 알 수 있다. 즉, 표본의 크기가 클수록 평균을 중심으로 대칭인 구간에 대한 확률이 커진다는 것을 알 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

3 $m=300$, $\sigma=10$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=300$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{n}}$$

인 정규분포 $\mathrm{N}\left(300,\ \dfrac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

(1) $n=25$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(300,\ \dfrac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(300,\ 2^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\overline{X} \ge 302)\\ &= \mathrm{P}(Z \ge 1)\\ &= 0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\ &= 0.5-0.3413\\ &= \mathbf{0.1587}\end{aligned}$$

(2) $n=100$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(300,\ \dfrac{10^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(300,\ 1^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\overline{X} \ge 302)\\ &= \mathrm{P}(Z \ge 2)\\ &= 0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\ &= 0.5-0.4772\\ &= \mathbf{0.0228}\end{aligned}$$

(3) $n=225$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(300,\ \dfrac{10^2}{225}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(300,\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\overline{X} \ge 302)\\ &= \mathrm{P}(Z \ge 3)\\ &= 0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)\\ &= 0.5-0.4987\\ &= \mathbf{0.0013}\end{aligned}$$

166

모 둠 학 습

• **학습 목표**_ 표본평균과 모평균의 관계를 알아보자.

• **학습 방법**_ 모평균과 표본평균을 이용하여 각 모둠 과제를 해결한다.

• **모둠의 구성**_ 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

모둠 이름	모둠 인원:　　　명　　으뜸이:　　　　　발표자:
	모둠 구성원 이름:

오른쪽 표는 어느 고등학교 2학년 남학생 200명 전체의 키를 번호순으로 나열한 것이다. 이 자료에서

모평균: $m=171.34$

모분산: $\sigma^2=50.5644$

모표준편차: $\sigma \fallingdotseq 7.1109$

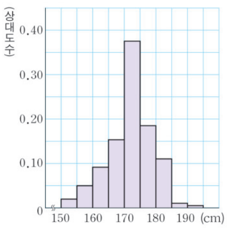
이다.

(단위: cm)

번호	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	173	177	174	171	172	174	172	179	178	167
01	164	172	173	173	178	165	177	177	186	179
02	165	171	175	169	182	174	171	173	179	162
03	173	175	183	168	175	174	165	183	171	180
04	178	178	161	158	178	169	167	171	172	180
05	180	170	171	181	179	176	173	165	174	181
06	188	172	180	174	171	171	176	154	165	182
07	166	172	183	174	170	177	170	173	170	171
08	173	170	162	166	170	170	164	178	179	165
09	156	155	162	175	161	163	176	191	180	180
10	181	174	172	174	171	169	168	172	177	174
11	174	160	153	169	171	168	171	170	172	172
12	171	172	172	175	176	164	174	172	175	180
13	154	151	168	166	181	179	172	180	173	165
14	173	173	162	179	168	181	164	172	168	168
15	171	173	166	160	163	169	161	165	176	180
16	176	170	174	170	180	171	170	175	170	176
17	173	179	184	168	169	167	159	155	158	156
18	170	169	162	169	171	177	181	171	173	175
19	176	171	164	173	170	177	160	156	155	158

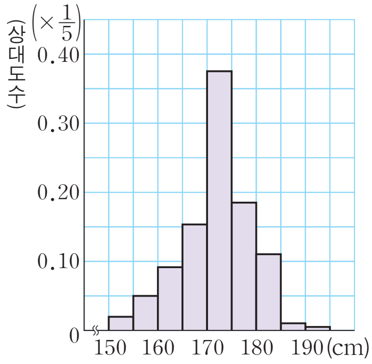
이를 상대도수의 분포표와 그 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상 ~ 155미만	4	0.02
155 ~ 160	10	0.05
160 ~ 165	18	0.09
165 ~ 170	31	0.155
170 ~ 175	75	0.375
175 ~ 180	37	0.185
180 ~ 185	22	0.11
185 ~ 190	2	0.01
190 ~ 195	1	0.005
합계	200	1



보충 학습

본문에 있는 상대도수의 그래프를 보다 엄밀하게 그리면 다음과 같다.



상대도수의 축에 $\left(\times\frac{1}{5}\right)$이라고 쓴 것, 즉 $\frac{1}{5}$을 곱한 것은 히스토그램에서 각 직사각형의 넓이가 상대도수와 같게 하기 위해서이다. 즉, 각 직사각형의 밑변의 길이가 5이므로 높이를 상대도수의 $\frac{1}{5}$로 해야 직사각형의 넓이가 상대도수와 같게 된다. 이렇게 함으로써 직사각형 전체의 넓이의 합이 1이 된다.

모둠 학습

| 모둠 과제1 |

답안 예시

(i) 재광(제비뽑기)

172, 183, 183, 171, 172, 179, 170, 171, 179, 171

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{10}(172+183+183+171+172+179+170+171+179+171)$
$=175.10$

(ii) 인수(난수표)

170, 170, 170, 155, 172, 167, 168, 162, 178, 179

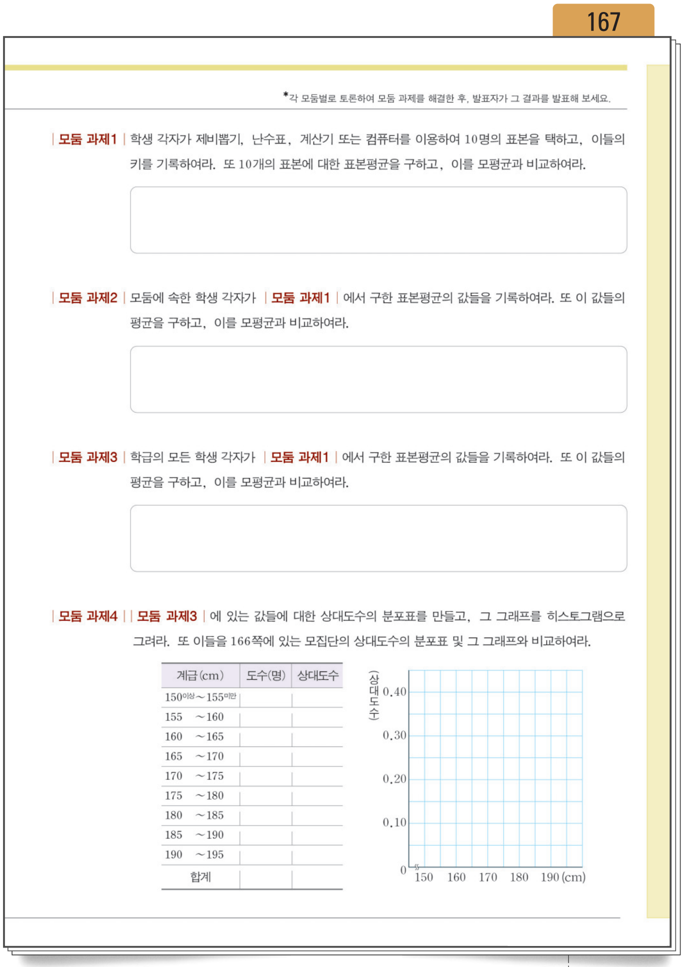
$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{10}(170+170+170+155+172+167+168+162+178+179)$
$=169.10$

(iii) 은영(컴퓨터)

176, 164, 174, 161, 171, 173, 181, 167, 170, 177

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{10}(176+164+174+161+171+173+181+167+170+177)$
$=171.40$

그러므로 재광, 인수, 은영의 결과와 모평균 $m=171.34$의 차이는 다음 표와 같다.


167

*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한 후, 발표자가 그 결과를 발표해 보세요.

| 모둠 과제1 | 학생 각자가 제비뽑기, 난수표, 계산기 또는 컴퓨터를 이용하여 10명의 표본을 택하고, 이들의 키를 기록하여라. 또 10개의 표본에 대한 표본평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제2 | 모둠에 속한 학생 각자가 | 모둠 과제1 | 에서 구한 표본평균의 값들을 기록하여라. 또 이 값들의 평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제3 | 학급의 모든 학생 각자가 | 모둠 과제1 | 에서 구한 표본평균의 값들을 기록하여라. 또 이 값들의 평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제4 | | 모둠 과제3 | 에 있는 값들에 대한 상대도수의 분포표를 만들고, 그 그래프를 히스토그램으로 그려라. 또 이들을 166쪽에 있는 모집단의 상대도수의 분포표 및 그 그래프와 비교하여라.

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상~155미만		
155 ~160		
160 ~165		
165 ~170		
170 ~175		
175 ~180		
180 ~185		
185 ~190		
190 ~195		
합계		

학생	재광	인수	은영
표본평균의 값	175.10	169.10	171.40
모평균과의 차이	3.76	2.24	0.06

| 모둠 과제2 |

답안 예시

| 모둠 과제1 | 의 재광, 인수, 은영을 하나의 모둠이라 하고, 표본평균의 값들과 그 값들의 평균은 다음 표와 같다.

학생	재광	인수	은영	평균
표본평균의 값	175.10	169.10	171.40	171.87

평균과 모평균의 차이는

$171.87-171.34=0.53$

| 모둠 과제3 |

답안 예시

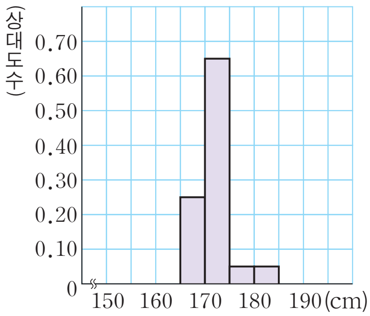
학급의 학생 수를 20명이라 하고, 학생 각자가 구한 표본평균의 값들이 다음과 같다고 하자.

175.1, 169.1, 171.4, 173.6, 171.3,
166.7, 168.5, 171.5, 173.4, 173.9,
169.0, 172.2, 170.3, 171.2, 166.1,
172.0, 173.4, 182.2, 174.1, 171.3

이 값들의 평균은 171.815이고, 모평균과의 차이는 0.475이다.

| 모둠 과제4 |

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상~155미만	0	0
155 ~160	0	0
160 ~165	0	0
165 ~170	5	0.25
170 ~175	13	0.65
175 ~180	1	0.05
180 ~185	1	0.05
185 ~190	0	0
190 ~195	0	0
합계	20	1



이 결과는 166쪽의 모집단의 상대도수의 분포표 및 그 그래프와 같이 170 이상 175 이하의 도수가 가장 많은 종 모양의 분포이다.

소단원의 학습 목표

1. 추정의 뜻을 안다.
2. 신뢰도, 신뢰구간의 뜻을 이해한다.
3. 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있고, 이를 해석할 수 있다.
4. 표본비율과 모비율의 관계를 이해한다.
5. 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있고, 이를 해석할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

추정, 신뢰도, 신뢰구간, 모비율, 표본비율, $\hat{p}$


168

2 통계적 추정

2 모평균과 모비율의 추정

학습 목표
- 추정, 신뢰도, 신뢰구간의 뜻을 이해한다.
- 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
- 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

다 가 서 기 / 과녁의 중심 찾기

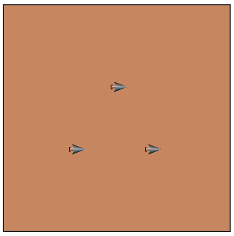
양궁 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심을 찾는 것은 어려운 일이다. 그러나 과녁판에 꽂힌 화살을 중심으로 원을 그리면 과녁의 중심이 그 원 안에 있을 확률이 높다. 그리고 화살이 많이 있을수록 중심을 찾을 확률은 더 높아진다.

통계적 추정은 이와 같이 꽂힌 화살(표본)을 이용하여 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심(모평균)을 찾는 것과 같다.

다가서기 / 해설

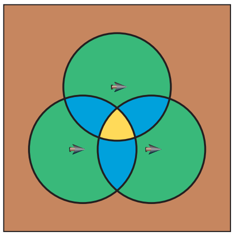
양궁은 올림픽 종목의 하나로 부분별로 점수가 정해져 있는 표적을 쏘아, 합산한 점수가 높은 쪽이 승리하는 경기이다. 과녁의 중앙 부분으로 갈수록 점수가 높아 선수들은 중앙 부분을 맞히려고 한다.

따라서 과녁판의 뒤에 꽂힌 화살을 보고 과녁의 중심을 예측할 수 있다.



오른쪽 그림은 화살이 3개가 꽂힌 과녁판을 뒤에서 본 것이다.

과녁판에 꽂힌 화살을 중심으로 원을 그리면 과녁의 중심이 그 원 안에 있을 확률이 높다.



그러므로 3개의 화살을 중심으로 각각 원을 그리면 겹쳐지는 부분이 많은 부분에, 즉 갈색 부분보다는 녹색 부분에, 녹색 부분보다는 파란색 부분에, 파란색 부분보다는 노란색 부분에 과녁의 중심이 있을 확률이 높다.

따라서 화살이 많이 있을수록 겹쳐지는 부분이 많아져 과녁의 중심을 찾을 확률이 높아진다.

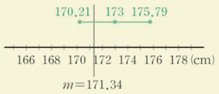
169

01 모평균의 추정

탐구하기 / 신뢰구간 만들기

앞의 166쪽에 주어진 키의 자료는 정규분포 $\mathrm{N}(171.34,\ 7.1109^2)$을 따른다고 할 수 있다. 이 자료에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이 모집단에서 크기 $n=25$인 표본을 택하고 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})$와 $\mathrm{V}(\overline{X})$를 구하여라.
2. 크기 $n=25$인 표본을 실제로 임의추출하고, 그 표본평균의 값 $\overline{x}$를 구하여라.
3. $\overline{x}=173$에 대하여 다음과 같은 끝 값을 가지는 구간을 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이와 같은 방법으로 물음 2에서 구한 $\overline{x}$에 대하여 다음 끝 값을 가지는 구간을 나타내어라.

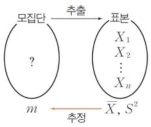


왼쪽 끝 값: $\overline{x}-1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}$, 오른쪽 끝 값: $\overline{x}+1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}$

4. 각자 만든 구간을 발표하고, 다른 사람이 만든 구간을 위의 그림에 함께 그려라.
5. 여러 사람이 만든 구간 중 $m=171.34$를 포함하는 비율을 구하여라.

알아보기 / 모평균을 추정하여 보자.

표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 평균, 표준편차 등을 추측하는 방법을 **추정**이라고 한다. 이를테면 표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 모평균 m을 추정할 수 있다.



이제 모평균을 추정하는 방법을 알아보자.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 이루는 모집단에서 크기 n인 표본 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

탐구하기 / 풀이

1. 모평균이 171.34이고 모분산이 7.1109^2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathbf{171.34}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\mathbf{\dfrac{7.1109^2}{25}}$

2. 답안 예시

크기 $n=25$인 표본을 택하면

173, 156, 171, 173, 175, 170, 178, 163, 164, 168, 164, 162, 165, 162, 181, 173, 168, 174, 177, 160, 170, 169, 171, 172, 174

$\overline{x}=(173+156+\cdots+172+174)\div 25$

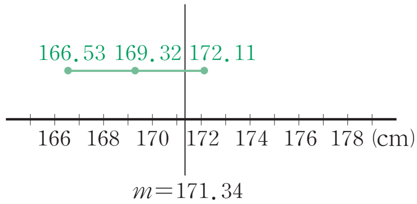
$=\mathbf{169.32}$

3. 왼쪽 끝 값:

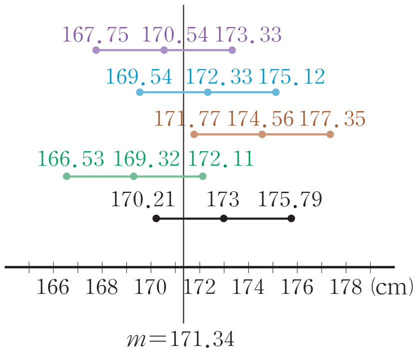
$169.32-1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}\fallingdotseq 166.53$

오른쪽 끝 값:

$169.32+1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}\fallingdotseq 172.11$



4. 답안 예시



5. 답안 예시

물음 4의 구간 중 $m=171.34$를 포함하는 비율은

$\dfrac{4}{5}\times 100=\mathbf{80(\%)}$

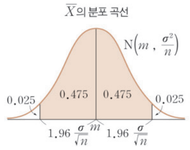
알아보기 / 해설

모집단 전체를 조사하기 어려우므로 표본조사를 하여 모집단에 대한 정보를 얻는 것이 통계학의 기본이다. 따라서 모평균, 모분산, 모표준편차 등은 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차와 밀접한 관련이 있으며, 모평균을 모를 때에 표본평균을 사용하는 것은 지극히 당연한 것이다. 한편, 모평균을 추정하기 위하여 표본평균을 사용한다면 표본평균의 분포(교과서 164쪽 참조)를 알아야 한다.

따라서 $\bar{X}$를 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

은 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로 $P(|Z|\le 1.96)=0.95$이다. 즉



$$P\left(-1.96\le\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)=P\left(\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=0.95$$

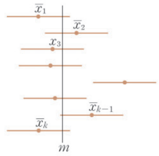
여기서 표본평균 $\bar{X}$의 값을 $\bar{x}$라고 할 때, 다음과 같은 구간

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m의 **신뢰도** 95 %인 **신뢰구간**이라고 한다.

네이만(Neyman, J. ; 1894~1981)
폴란드 태생의 미국 통계학자로서 1937년 신뢰구간의 개념을 창안하였다.

표본평균 $\bar{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지며, 따라서 신뢰구간도 달라진다.



그러므로 '신뢰도 95 %인 신뢰구간'의 뜻은 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 이들 중 모평균 m을 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.

한편 $P(|Z|\le 2.58)=0.99$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\bar{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

모평균 m의 신뢰구간

평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 n인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n의 평균을 $\bar{X}$라고 할 때

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\bar{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우에 표본의 크기 n이 클 때($n\ge 30$)에는 σ 대신 표본표준편차 S를 이용할 수 있다.

알아보기 / 해설

- $P\left(-1.96\le\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)=0.95$

에서

$$-1.96\le\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96$$
$$\iff -1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\bar{X}-m\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\iff -\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le -m$$
$$\le -\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\iff \bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

임을 알 수 있다. 그러므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간은 위의 식에서 $\bar{X}$의 자리에 그 측정값 $\bar{x}$를 대입하여 구한다.

- 모평균에 대한 신뢰구간은 추출되는 표본에 따라 달라진다. 그러므로 표본조사를 여러 번 반복할 때마다 신뢰구간도 달라져서 그중에는 모평균 m을 포함하는 것도 있고 m을 포함하지 않는 것도 있다. 이때, 모평균 m을 포함하는 신뢰구간을 갖는 표본이 약 95 %가 되는 것을 '신뢰도 95 %인 신뢰구간'이라고 한다.

- $P\left(-2.58\le\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 2.58\right)=0.99$에서

$$-2.58\le\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 2.58$$
$$\iff -2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\bar{X}-m\le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\iff -\bar{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le -m\le -\bar{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\iff \bar{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

여기서 표본평균 $\bar{X}$의 값 $\bar{x}$를 대입하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구한다.

보충 학습

$\bar{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (k는 상수)에서

$$\left(\bar{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때, $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$를 '신뢰구간의 길이'라고 한다.

신뢰도가 일정할 때 표본의 크기가 클수록 신뢰구간의 길이는 짧아지고, 표본의 크기가 일정할 때 신뢰도가 높을수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

171

함께하기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어떤 회사에서 생산하는 통조림의 무게는 평균이 m g이고, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 통조림 25개를 임의추출하여 표본평균을 구하였더니 그 값이 502 g이 되었을 때, 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %, 99 %인 신뢰구간을 각각 구하여라.

풀이

$n=25$, $\overline{x}=502$, $\sigma=10$이므로

(i) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$502-1.96\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-3.92\le m\le 502+3.92$$

$$\therefore \mathbf{498.08\le m\le 505.92}$$

(ii) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$502-2.58\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+2.58\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-5.16\le m\le 502+5.16$$

$$\therefore \mathbf{496.84\le m\le 507.16}$$

스스로 하기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 추출하여 그 평균을 구했더니 60이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %, 99 %인 신뢰구간을 각각 구하여라.

2 어느 회사에서 생산하는 음료수의 A 성분의 함유량은 정규분포를 따른다고 한다. 이 음료수 400병을 임의추출하여 A 성분의 함유량을 검사하였더니 평균이 30.5 mg, 표준편차가 5.8 mg이었다. 이 음료수 1병에 담긴 A 성분의 평균 함유량 m에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

모표준편차를 모를 때에는 표본표준편차를 사용한다.

함께하기 / 해설

1 (i) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(ii) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이 식에 표본의 크기 n, 표본평균의 값 $\overline{x}$ 및 모표준편차 σ의 값을 대입하여 신뢰구간을 구한다.

스스로 하기 / 풀이

1 $n=100$, $\overline{x}=60$, $\sigma=6$이므로

(i) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$60-1.96\frac{6}{\sqrt{100}}\le m \le 60+1.96\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$$60-1.176\le m\le 60+1.176$$

$$\therefore \mathbf{58.824\le m\le 61.176}$$

(ii) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$60-2.58\frac{6}{\sqrt{100}}\le m \le 60+2.58\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$$60-1.548\le m\le 60+1.548$$

$$\therefore \mathbf{58.452\le m\le 61.548}$$

2 $n=400$, $\overline{x}=30.5$, $\sigma(\overline{x})=5.8$

표본의 크기 $n=400$이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있다. 즉,

$$\sigma=\sigma(\overline{x})=5.8$$

(1) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$30.5-1.96\frac{5.8}{\sqrt{400}}\le m \le 30.5+1.96\frac{5.8}{\sqrt{400}}$$

$$30.5-0.5684\le m\le 30.5+0.5684$$

$$\therefore \mathbf{29.9316\le m\le 31.0684}$$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$30.5-2.58\frac{5.8}{\sqrt{400}}\le m \le 30.5+2.58\frac{5.8}{\sqrt{400}}$$

$$30.5-0.7482\le m\le 30.5+0.7482$$

$$\therefore \mathbf{29.7518\le m\le 31.2482}$$

공학 도구 / 해설

• 엑셀 프로그램의 CONFIDENCE 함수를 이용하면 신뢰구간을 쉽게 구할 수 있다. 본문 내용은 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하는 것인데, Alpha에는

'1−(신뢰도)'

의 값을 입력하는 것에 주의한다.
따라서 신뢰도 95 %는 0.95이므로

$1-0.95=0.05$

를 Alpha에 입력한다.
만약 신뢰도 99 %이면 Alpha에는

$1-0.99=0.01$

을 입력한다.
한편 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 결과값은 신뢰도 95 %인 경우에는 $1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이, 신뢰도 99 %인 경우에는 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 계산된다.

172

공 학 도 구

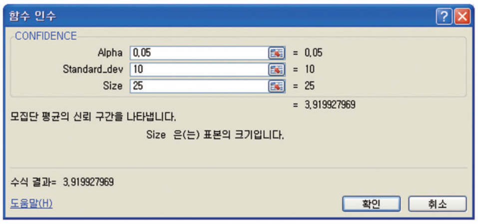
*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

컴퓨터 프로그램을 이용하여 신뢰구간 구하기

CONFIDENCE 함수를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.
이를테면 171쪽의 함께하기 **1**에서 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 다음 순서로 구하여 보자.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭하면 '함수 마법사' 대화 상자가 나타난다. 이때, 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'CONFIDENCE'를 선택한 후 확인을 클릭하면 '함수 인수' 대화 상자가 나타난다.

2단계 Alpha에 {1−(신뢰도)}, Standard_dev에 표준편차, Size에 표본의 크기를 입력한 후 확인을 클릭한다.
여기서는 신뢰도가 95 %, 표준편차가 10, 표본의 크기가 25인 경우이므로 Alpha에 0.05, Standard_dev에 10, Size에 25를 입력한다.

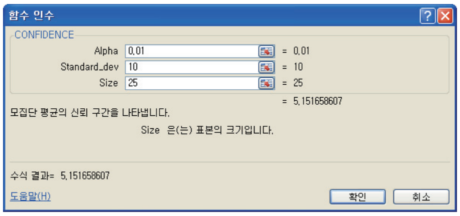


3단계 위의 1, 2, 3단계를 실행하면 그 결과가 3.919927969로 나온다.
여기서 3.919927969를 소수 셋째 자리에서 반올림하여 3.92로 쓰자.

4단계 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$502-3.92\le m\le 502+3.92$$
$$\therefore 498.08\le m\le 505.92$$

• 교과서 171쪽의 함께하기 **1**에서 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 엑셀 프로그램을 이용하여 구하면 다음과 같다.



여기서 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 5.151658607이므로 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\fallingdotseq 5.15$로 계산하면 모평균 m의 99 %인 신뢰구간은 다음과 같다.

$502-5.15\le m\le 502+5.15$

$\therefore 496.85\le m\le 507.15$

참고 | 추정(推定, estimation)

통계적 추정에는 점추정(點推定, point estimation)과 구간추정(區間推定, interval estimation)이 있다.

(1) 점추정: 모집단의 평균, 분산 또는 비율 등을 하나의 실수로 추정하는 것이다. 이를테면 표본평균으로 모평균을 추정하고, 표본분산으로 모분산을 추정하는 것이 점추정이다.

(2) 구간추정: 모집단의 평균, 분산 또는 비율 등을 하나의 구간으로 추정하는 것이다.

우리는 구간추정만을 다루고 있으나 사실은 이미 점추정의 개념을 쓰고 있다. 이를테면 모평균의 구간추정에서 표본평균을 사용하는 것이 그 예이다.

173

02 표본비율의 분포

알 아 보 기 / 모비율과 표본비율의 뜻을 알아보자.

p는 비율을 나타내는 proportion의 첫 글자이다.

$\hat{p}$은 'p−hat(피 햇)'으로 읽는다.

제품의 불량률, 정책에 대한 찬성률, 어떤 정당의 지지율, 즐겨 보는 TV 프로그램의 시청률 등은 우리 생활 주변에서 흔히 접할 수 있으며, 이들을 조사하고 분석하는 것은 우리의 의사 결정에 많은 영향을 미친다.

이와 같이 모집단의 어떤 사건에 대한 비율을 그 사건에 대한 **모비율**이라 하고, 기호로 p와 같이 나타낸다. 또 모집단에서 임의추출한 표본에서의 어떤 사건에 대한 비율을 그 사건에 대한 **표본비율**이라 하고, 기호로

$$\hat{p}$$

과 같이 나타낸다.

일반적으로 어떤 사건에 대한 표본비율은 다음과 같다.

표본비율

크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 그 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

| **보기** | 2007년 우리나라에서 태어난 아이의 수는 496710명이고, 이 중에서 남자 아이의 수는 255762명이다. 이때, 2007년 우리나라에서 남자 아이가 태어난 비율, 즉 모비율 p는 다음과 같다.

$$p=\frac{255762}{496710}≒0.515$$

한편 2007년에 태어난 아이들 중에서 1000명을 임의추출하였더니 남자 아이가 508명이라면, 표본비율 $\hat{p}$은 다음과 같다.

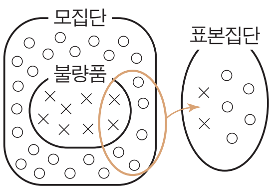
$$\hat{p}=\frac{X}{n}=\frac{508}{1000}=0.508$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어느 형광등 회사에서 생산된 제품 중 500개를 임의추출하여 검사한 결과 불량품이 2개였다고 한다. 표본의 불량률 $\hat{p}$을 구하여라.

알아보기 / 해설

어느 공장에서 생산되는 불량률이 p인 제품 중에서 n개의 제품을 택할 때, 불량품의 개수를 확률변수 X라고 하자.



이때, X가 가지는 값은 0, 1, 2, ⋯, n이고 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$가 불량품의 표본비율이다.

이와 같이 크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 할 때, $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$를 표본비율이라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 500개의 표본 중에서 2개가 불량품이므로 표본의 불량률은

$$\hat{p}=\frac{2}{500}=\frac{1}{250}=\mathbf{0.004}$$

Plus 문제

어느 지역에서 고등학생 300명을 임의추출했을 때, 200명이 풍산자로 수학을 공부하고 있었다. 풍산자로 수학을 공부하는 학생의 표본비율 $\hat{p}$을 구하여라.

| 풀이 |

300명의 고등학생 중에서 200명의 고등학생이 풍산자로 수학을 공부하므로

$$\hat{p}=\frac{200}{300}=\frac{2}{3}$$

참고 | 표본의 크기보다 더 중요한 추출 방법

1936년 11월 미국의 대통령 선거에서 미국의 몇몇 언론은 엄청난 오보를 냈다. 실제 당선자인 루스벨트를 제쳐두고 랜든이 당선되었다고 대서특필하였던 것이다. 오보의 이유는 그 당시 오랜 역사와 최고의 발행 부수를 자랑하던 다이제스트(Leterary Degest)라는 잡지사가 실시한 조사의 표본 추출 방법이 잘못되었기 때문이다. 다이제스트 잡지사는 투표자의 표본을 전화번호부와 자동차 소유자 명부로부터 추출하였는데, 1936년 당시에 전화와 자동차를 소유한 사람은 주로 중산층이었고, 이들은 주로 공화당의 랜든 후보를 지지하는 사람들이었다.

이와 같이 표본조사에서는 표본의 크기도 중요하지만 그보다는 모집단을 대표할 수 있는 표본의 추출 방법이 더욱 중요함을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$

↓ n 을 충분히 크게

정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$

↓ $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$

표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$

알 아 보 기 / 표본비율의 분포를 구하여 보자.

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$에서 확률변수 X는 크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수이므로 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, 모집단에서 그 사건이 일어날 확률은 p이다. 즉, 확률변수 X는 어떤 사건이 일어날 확률이 p인 시행을 n번 독립시행했을 때, 그 사건이 일어난 횟수이므로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르게 된다.

따라서 X의 평균과 분산은 각각 $\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$이다.

이때, $\hat{p}$의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\cdot np=p$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

일반적으로 표본의 크기 n이 충분히 클 때, $\hat{p}$의 분포는 정규분포에 가까워지는 것으로 알려져 있다.

즉, $\hat{p}$은 n이 충분히 클 때 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워지며, 확률변수

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

표본비율의 분포

표본비율 $\hat{p}$은 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워지고 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

n이 $np\geq5$ 또는 $nq\geq5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

함께하기 / 해설

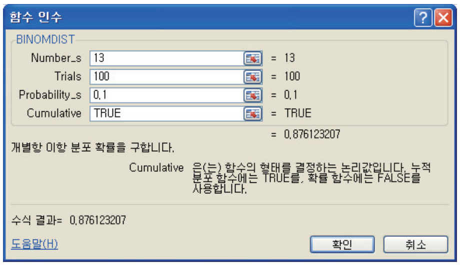
1 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 구하여 보자.

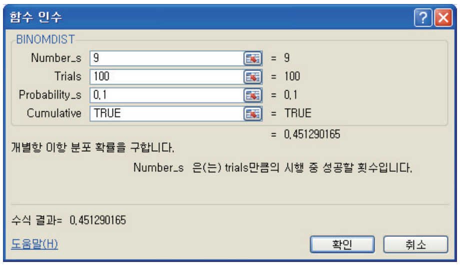
임의추출한 사과 100개 중에서 규격 미달인 사과의 개수를 확률변수 X라고 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(10\leq X\leq 13)=\mathrm{P}(X\leq 13)-\mathrm{P}(X\leq 9)$$

여기서 엑셀 프로그램을 이용하여 $\mathrm{P}(X\leq 13)$, $\mathrm{P}(X\leq 9)$의 값을 구하면 각각 다음과 같다.





$$\therefore\ \mathrm{P}(10\leq X\leq 13)=0.876123207-0.451290165=0.424833042$$

[참고] 함께하기 해설에서 구한 값과 교과서 175쪽의 함께하기 **1**의 풀이에서 구한 값에는 차이가 있다. 그 이유는 교과서 175쪽의 함께하기 **1**의 풀이는 근사적으로 구한 것이기 때문이다.

175

함께하기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

$np=100\times0.1=10>5$이므로 n은 충분히 크다.

1 어떤 과수원에서 생산되는 사과의 10 %가 규격 미달이라고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 100개를 임의추출할 때, 규격 미달인 사과가 10개 이상 13개 이하일 확률을 구하여라.

풀이

표본에 있는 100개의 사과 중에서 규격 미달인 것의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.1\le\hat{p}\le0.13)$이다.

여기서 모비율 $p=0.1$이고 $n=100$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.1\le\hat{p}\le0.13)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.1-0.1}{0.03}\le Z\le\frac{0.13-0.1}{0.03}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=\mathbf{0.3413}\end{aligned}$$

스스로 하기 /

익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

2 어느 도시 주민의 20 %가 과체중이라고 한다. 이 도시에서 주민 100명을 임의추출할 때, 25명 이상이 과체중일 확률을 구하여라.

3 어떤 정책에 대하여 주민의 60 %가 찬성한다고 한다. 이 지역 주민 96명을 임의추출할 때, 그 정책에 대하여 찬성하는 사람이 48명 이상 60명 이하일 확률을 구하여라.

4 멘델의 유전 법칙에 의하면 노란색과 녹색의 완두콩을 교배할 때, 제2세대에서 노란색의 완두콩이 나올 비율은 0.75이고 녹색의 완두콩이 나올 비율은 0.25이다. 제2세대의 완두콩 300개를 조사할 때, 노란색 완두콩의 비율이 0.7 이상 0.8 이하일 확률을 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

2 표본에 있는 100명 중 과체중인 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.25)$이다.

여기서 모비율 $p=0.2$이고 $n=100$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(\hat{p}\ge0.25)&=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}\ge\frac{0.25-0.2}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1.25)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.25)\\&=0.5-0.3944\\&=\mathbf{0.1056}\end{aligned}$$

3 표본에 있는 96명 중 정책에 찬성하는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.5\le\hat{p}\le0.625)$이다.

여기서 모비율 $p=0.6$이고 $n=96$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-0.6}{\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{96}}}=\frac{\hat{p}-0.6}{0.05}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(0.5\le\hat{p}\le0.625)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.5-0.6}{0.05}\le\frac{\hat{p}-0.6}{0.05}\le\frac{0.625-0.6}{0.05}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le0.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.1915+0.4772=\mathbf{0.6687}\end{aligned}$$

4 표본에 있는 300개의 완두콩 중 노란색 완두콩의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.7\le\hat{p}\le0.8)$이다.

여기서 모비율 $p=0.75$이고 $n=300$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-0.75}{\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}}}=\frac{\hat{p}-0.75}{0.025}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(0.7\le\hat{p}\le0.8)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.7-0.75}{0.025}\le\frac{\hat{p}-0.75}{0.025}\le\frac{0.8-0.75}{0.025}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=2\times0.4772=\mathbf{0.9544}\end{aligned}$$

176

03 모비율의 추정

알 아 보 기 / 모비율을 추정하여 보자.

어느 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하였을 때, 이 중에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 하면 표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$는 n이 충분히 클 때 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워진다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

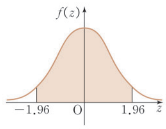
또 n이 충분히 클 때, $\hat{p}$의 분산 $\frac{pq}{n}$에서 미지의 값인 p, q 대신에 표본비율을 대입한 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$도 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

$q=1-p$이므로 $\hat{q}=1-\hat{p}$

그러므로 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$

이고, 이 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$\mathrm{P}\left(-1.96\le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}\le 1.96\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$
$$=0.95$$

여기서 $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$이 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간이다.

일반적으로 모비율 p의 신뢰구간은 다음과 같다.

모비율 p의 신뢰구간

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

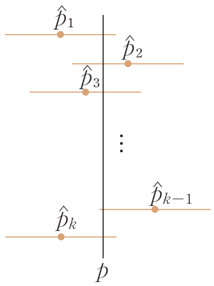
(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

알아보기 / 해설

표본비율 $\hat{p}$의 정확한 분포는 알기 어렵다. 따라서 모비율 p에 대한 구간추정을 하기 위해서는 표본의 크기 n을 충분히 크게 하여 $\hat{p}$의 근사적인 분포를 이용하여야 한다. 또 $\hat{p}$의 분산 $\frac{pq}{n}$를 모를 때에는 $\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}$을 사용한다.

한편 모평균의 구간추정에서와 마찬가지로 표본비율 $\hat{p}$은 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지며, 신뢰구간도 달라진다.

그러므로 '신뢰도 95 %인 신뢰구간'의 뜻은 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 모비율 p를 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.



보충 학습

신뢰도는 보통 95 %를 많이 사용한다. 신뢰도는 믿을 수 있는 정도이므로 신뢰도 100 %를 사용하는 것이 바람직할 것 같은데 신뢰도 95 %를 많이 사용하는 이유는 무엇일까?

신뢰도를 100 %에 가까운 99.7 %로 하면 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+2.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\hat{p}-2.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이고, 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이다. 이때, 99.7 %의 신뢰구간의 길이

$5.92\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 또는 $5.92\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

은 95 %의 신뢰구간의 길이

$3.92\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 또는 $3.92\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

의 1.5배 이상이 된다.

신뢰구간의 길이는 짧을수록 좋은데 신뢰도를 5 % 정도 높이기 위하여 신뢰구간의 길이를 50 % 이상 늘려야 하는 것은 바람직하지 못하다.

예를 들어 이번 수학 시험 평균은 0점에서 100점 사이라고 한다면 신뢰도 100 %이지만 의미가 없어진다. 신뢰구간의 길이가 너무 길기 때문에 추정을 하는 의미가 사라지는 것이다.

그렇다고 신뢰구간의 길이를 무작정 짧게 할 수도 없다. 그럴려면 표본의 크기가 커져야 하는데 이는 통계 조사시 시간과 비용이 많이 든다.

이런 이유들로 신뢰도 95 %를 가장 많이 사용하는 것이다.

177

| 보기 | 다음은 원자력 발전 비중에 대한 여론 조사의 결과이다.

국민 3명 중 2명이 원전 확대 찬성

국민 3명 중 2명은 원전 비중을 '현재보다 늘려야 한다.(67.5 %)'는 의견에 찬성하고, 거주지 내 원전 건설에 대해서도 '찬성하거나 지역 투자 규모를 보고 결정하겠다.(67.4 %)'는 의견을 피력하였다.

《여론 조사 결과》 (단위: %)

항목	2008
원자력 발전 비중을 늘려야 한다.	67.5
거주 지역 내 원전 건설에 찬성한다.	34.6
(지역 발전 투자 금액을 보고 결정하겠다.)	32.8

※여론 조사 개요
○ 조사 기간 : 2008년 7월 12일
○ 조사 대상 : 전국 19세 이상 성인 남녀 1,000명
○ 오차 범위 : 95 % 신뢰수준, 오차 범위 ±3.1 %
○ 조사 의뢰 : 한국원자력문화재단

이 조사에서 응답자 1000명 중 67.5 %가 '원자력 발전 비중을 늘려야 한다.' 에 찬성하였다. 여기서 신뢰수준이 95 %이고, 오차 범위가 ±3.1 %이므로 전체 국민의 67.5±3.1 (%), 즉 64.4 %~70.6 %가 '원자력 발전 비중을 늘려야 한다.' 에 찬성한다고 해석할 수 있다.

이때, 신뢰수준 95 %의 뜻은 표본을 달리하여 이러한 조사를 100번 하더라도 95번 정도는 비슷한 결과가 나온다는 의미이다.

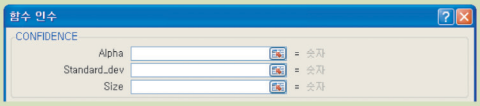
이 조사에서 모비율의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은 [64.4 %, 70.6 %]이다.

이때, 오차 범위 3.1 %는 $1.96\sqrt{\frac{50\times50}{1000}}$ %를 계산한 값으로 오차의 최대 허용 범위이다.

컴퓨터 프로그램을 이용한 모비율의 신뢰구간 추정

❶ 메뉴에서 [수식] – [함수 삽입] 을 택하고 CONFIDENCE 함수를 선택하면 다음과 같은 대화 상자가 나타난다.

❷ Alpha에 {1 – (신뢰도)}, Standard_dev에 표준편차 $\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, Size에 표본의 크기 n을 입력하면 신뢰구간의 계산에 필요한 값을 구하여 준다. 이를테면 Alpha에 0.05를 입력하면 $1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$의 값을 계산해 준다.



알아보기 / 해설

교과서의 | **보기** | 에서 제시한 '원자력 발전 비중에 대한 여론 조사' 에 대하여 다음을 알 수 있다.

❶ 조사 대상: 전국 19세 이상 성인 남녀 1000명

❷ 표본의 크기: 1000

❸ 신뢰도(신뢰수준): 95 %

❹ 오차 범위: ±3.1 %

여기에서 '원자력 발전 비중을 늘려야 한다.' 라는 항목에 대하여 67.5 %가 찬성하였으므로 $\hat{p}$의 값은 0.675이다.

오차 범위가 ±3.1 %이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$0.675-0.031\le p\le 0.675+0.031$

$\therefore 0.644\le p\le 0.706$

한편, '거주 지역 내 원전 건설에 찬성한다.' 라는 항목에 대하여 34.6 %가 찬성하였으므로 $\hat{p}$의 값은 0.346이다.

오차 범위가 ±3.1 %이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$0.346-0.031\le p\le 0.346+0.031$

$\therefore 0.315\le p\le 0.377$

또 '(지역 발전 투자 금액을 보고 결정하겠다.)' 라는 항목에 대하여 32.8 %가 찬성하였으므로 $\hat{p}$의 값은 0.328이다.

오차 범위가 ±3.1 %이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$0.328-0.031\le p\le 0.328+0.031$

$\therefore 0.297\le p\le 0.359$

[참고] 표본비율의 표준편차 $\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$은 표본의 크기 n이 일정하면 $\hat{p}=\hat{q}=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\sqrt{\frac{1}{4n}}$을 갖는다.

일반적으로 여론 조사에서 말하는 오차 범위는 신뢰도 95 %일 때의 $\pm1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}$의 값을 말한다.

178

함 께 하 기 / 익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어느 지방 자치 단체에서 새롭게 개발한 정책을 시행하기에 앞서 이 정책에 대한 주민의 선호도를 조사하기로 하였다. 지역 주민 400명을 임의추출하여 이 정책에 대한 선호도를 조사하였더니, 220명이 찬성한다고 응답하였다. 전체 주민의 몇 %가 이 정책을 찬성할 것인지를 신뢰도 95 %인 신뢰구간으로 추정하여라. (단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

풀이

표본비율 $\hat{p}=\frac{220}{400}=0.55$이고, $n=400$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.55-1.96\sqrt{\frac{0.55\times0.45}{400}}$$
$$\fallingdotseq 0.55-0.049=0.501$$
$$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.55+1.96\sqrt{\frac{0.55\times0.45}{400}}$$
$$\fallingdotseq 0.55+0.049=0.599$$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.501\le p\le 0.599$$

즉, 신뢰도 95 %로 추정하였을 때 전체 주민의 **50.1 %~59.9 %**가 이 정책을 찬성할 것으로 추정된다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 133쪽 | 익힘책 134쪽 | 익힘책 135쪽

1 어느 주차장에 주차된 승용차 중 100대를 임의추출하여 조사해 보니 그 중 흰색 차량은 36대라고 한다. 이 지역에서 운행되는 전체 승용차 중 흰색 차량의 비율에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

2 어느 지역의 실업률을 조사하기 위하여 이 지역의 주민 중 1600명을 임의추출하였다. 이 중에서 96명이 실업자라고 할 때, 이 지역의 실업률에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

함께하기 / 해설

1 $\hat{p}$의 분산 및 표준편차는

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n},\ \sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

이때, p(또는 $q=1-p$)의 값을 모를 때에는 p, q 대신에 $\hat{p}$, $\hat{q}$을 사용한다.

스스로 하기 / 풀이

1 $n=100$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{36}{100}=0.36$이고, $n=100$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$=0.36-2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}$$
$$=0.36-0.12384$$
$$=0.23616$$
$$\hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$=0.36+2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}$$
$$=0.36+0.12384$$
$$=0.48384$$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$\mathbf{0.23616\le p\le 0.48384}$

2 $n=1600$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{96}{1600}=0.06$이고, $n=1600$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$=0.06-1.96\sqrt{\frac{0.06\times0.94}{1600}}$$
$$\fallingdotseq 0.06-0.012$$
$$=0.048$$
$$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$=0.06+1.96\sqrt{\frac{0.06\times0.94}{1600}}$$
$$\fallingdotseq 0.06+0.012$$
$$=0.072$$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\mathbf{0.048\le p\le 0.072}$

179

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호: 모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, 모비율, 표본비율, $\overline{X}$, $\hat{p}$

IV 2. 통계적 추정

모집단과 표본

의사소통

1 다음 각 경우의 예를 하나씩 들어라.

(1) 전수조사를 해야 하는 경우

(2) 표본조사를 해야 하는 경우

표본평균의 분포

계산

2 어느 지역의 가구당 월 소득은 평균이 3000000원, 표준편차가 500000원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 중에서 25가구를 임의추출할 때, 월 소득의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(\overline{X} \le 2800000)$ (2) $\mathrm{P}(2700000 \le \overline{X} \le 3200000)$

모평균의 추정

문제 해결

3 어떤 화훼 농가에서 생산하는 꽃의 개화 시간은 표준편차가 10시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산한 꽃 100송이의 개화 시간을 조사하였더니 표본평균이 96시간이었다. 이 농가에서 생산하는 꽃의 평균 개화 시간에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

모비율의 추정

문제 해결

4 어느 회사에서 신제품을 시장에 내놓기에 앞서 이 제품의 선호도를 조사하기로 하였다. 임의추출된 625명에게 신제품의 선호도를 조사하였더니 375명이 좋다고 응답하였다. 전체 국민의 몇 %가 이 신제품을 선호할 것인지를 신뢰도 95 %인 신뢰구간으로 추정하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

표본 크기의 결정

이해

5 어떤 테이프의 길이는 표준편차가 6.2 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 테이프의 길이의 평균에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구할 때, 신뢰구간의 폭을 2 cm 이내로 하려면 표본의 크기를 얼마 이상으로 해야 하는가?

중단원 확인하기 / 풀이

1 (1)우리나라 전체 인구 조사 등

(2)가전제품의 수명 시간 조사 등

2 $m=3000000$, $\sigma=500000$, $n=25$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3000000,\ 100000^2)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(\overline{X} \le 2800000)$

$$=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{2800000-3000000}{100000}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z \le -2)$$
$$=\mathrm{P}(Z \ge 2)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$
$$=0.5-0.4772=\mathbf{0.0228}$$

(2) $\mathrm{P}(2700000 \le \overline{X} \le 3200000)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{2700000-3000000}{100000} \le Z \le \frac{3200000-3000000}{100000}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-3 \le Z \le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$
$$=0.4987+0.4772=\mathbf{0.9759}$$

3 $n=100$, $\overline{x}=96$, $\sigma=10$이므로 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$96-2.58\frac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 96+2.58\frac{10}{\sqrt{100}}$$
$$96-2.58 \le m \le 96+2.58$$
$$\therefore \mathbf{93.42 \le m \le 98.58}$$

4 표본비율 $\hat{p}=\frac{375}{625}=0.6$이고, $n=625$는 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$0.6-1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{625}} \fallingdotseq 0.562$$
$$0.6+1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{625}} \fallingdotseq 0.638$$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$0.562 \le p \le 0.638$

즉, 신뢰도 95 %로 추정하였을 때 전체 국민의 **56.2 %~63.8 %**가 이 제품을 선호할 것으로 추정된다.

5 $\sigma=6.2$이므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{6.2}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{6.2}{\sqrt{n}}$$

이때, 신뢰구간의 폭이 2 cm 이내이어야 하므로

$$\overline{x}+1.96\frac{6.2}{\sqrt{n}}-\left(\overline{x}-1.96\frac{6.2}{\sqrt{n}}\right) \le 2$$
$$2 \times 1.96\frac{6.2}{\sqrt{n}} \le 2 \qquad \therefore n \ge 147.671104$$

따라서 표본의 크기를 **148** 이상으로 해야 한다.

중단원 평가 문제

정답과 풀이 p.256

01 바탕

다음 중에서 전수조사를 하여야 하는 경우는?

① 선거에서 유권자를 확인하는 경우
② TV 프로그램의 시청률을 구하는 경우
③ 가전제품의 수명 시간을 조사하는 경우
④ 공산품 중에서 불량품의 비율을 조사하는 경우
⑤ 어떤 질병에 대한 새로운 치료약을 개발하는 경우

02 기본

모집단 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})$　　(2) $\mathrm{V}(\overline{X})$　　(3) $\sigma(\overline{X})$

03 바탕

정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기 16인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 4 이상 6 이하일 확률을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$)

04 실력

어느 공장에서 생산하는 형광등의 수명은 모평균 1500시간, 모표준편차 100시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 형광등 중에서 n개를 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때,

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge 1400+\dfrac{200}{\sqrt{n}}\right)\ge 0.95$가 성립하는 n의 최솟값을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=0.45$)

모표준편차를 모를 때에는 표본표준편차를 사용한다.

05 기본

어느 지역에서 고등학생 100명을 임의추출하여 몸무게를 조사하였더니 표본평균은 56.5 kg, 표본표준편차는 6.3 kg이었다. 이 지역 고등학생의 몸무게의 평균에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$)

06 기본

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 n개의 표본을 택하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 하자. 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이가 모표준편차의 $\frac{1}{5}$ 이내일 때, 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

07 바탕

어느 고등학교에서 지난 여름 방학 때, 봉사활동을 한 학생은 전체의 80 %라고 한다. 이 학교에서 학생 100명을 임의추출할 때, 지난 여름 방학 때 봉사활동을 한 학생 수가 76명 이상 88명 이하일 확률을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$)

08 기본

어느 지역 주민의 B형 간염의 감염 실태를 조사하기 위하여 400명을 임의추출하여 조사한 결과 10명이 감염된 것으로 나타났다. 이 지역 주민의 B형 간염의 감염율을 신뢰도 95 %인 신뢰구간으로 추정하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

대단원 평가 문제

정답과 풀이 p.258

01

다음 중에서 표본조사의 장점이 아닌 것은?

① 시간의 단축　② 경비의 절감
③ 정확성의 제고　④ 투명성의 확보
⑤ 한 번 검사하면 파괴되어서 그 물건을 못 쓰게 되는 검사에도 가능

02

확률변수 X의 평균이 5, 표준편차가 1일 때, 확률변수 $Y=2X^2+X+1$의 평균은?

① 5　② 16　③ 58
④ 61　⑤ 88

03

주사위를 360번 던져서 4의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 표준편차를 순서대로 바르게 짝지은 것은?

① 60, 50　② 60, $4\sqrt{2}$　③ 60, $5\sqrt{2}$
④ 90, 50　⑤ 90, $5\sqrt{2}$

04

5개의 제품 중에 2개의 불량품이 들어 있다. 이 중에서 2개의 제품을 동시에 꺼낼 때 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{4}{5}$　③ 1
④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

05

연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=4x^3 \quad (0\le x\le 1)$$

일 때, X의 분산은?

① $\frac{2}{75}$　② $\frac{4}{25}$　③ $\frac{1}{15}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

06

어느 회사 제품의 10 %가 3년 이내에 고장이 난다고 한다. 이 회사 제품 100개에 대하여 3년 이내에 고장나는 제품의 수를 확률변수 X라고 할 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?

① 90　② 94　③ 100
④ 109　⑤ 115

07

다음 중 표본의 크기, 신뢰도 및 신뢰구간 사이의 관계에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.
② 신뢰도가 낮아질수록 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
③ 표본의 크기가 커질수록 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
④ 표본의 크기가 커져도 신뢰구간의 길이는 일정하다.
⑤ 신뢰도가 높아지고 표본의 크기가 작아질수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

08

어느 과수원에서 생산하는 메론 1개의 무게는 평균이 500 g, 표준편차가 20 g인 정규분포를 따른다고 한다. 25개의 메론을 임의추출하여 그 무게를 조사할 때, 표본평균이 490 g 이상 510 g 이하일 확률은? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)=0.4938$)

① 0.4938 ② 0.5228 ③ 0.7056
④ 0.8123 ⑤ 0.9876

09

500원짜리 동전 2개와 100원짜리 동전 1개를 동시에 던지는 시행에서 앞면이 나오는 동전을 상금으로 갖는다. 상금의 액수를 확률변수 X라고 할 때, X의 분산은?

① 95500 ② 10800 ③ 113400
④ 127500 ⑤ 155600

10

어느 지역의 주민들 중에서 버스로 출퇴근하는 사람의 비율을 조사하기 위하여 400명을 표본으로 택하였다. 이 중에서 320명이 버스를 이용한다고 응답하였을 때, 이 지역 주민의 버스 이용률 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은?

① $0.6998 \le p \le 0.8392$
② $0.6998 \le p \le 0.9145$
③ $0.7608 \le p \le 0.8392$
④ $0.7608 \le p \le 0.9145$
⑤ $0.8512 \le p \le 0.9145$

11

어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품 25개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 표본평균이 32.2 g, 표본표준편차가 0.5 g이었고, 이 제품의 평균 무게 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $\alpha \le m \le \beta$일 때, $\beta - \alpha$의 값은?

① 0.392 ② 0.412 ③ 0.498
④ 0.534 ⑤ 0.615

12

어느 대리점에서는 판매한 가전 제품 중 10 %는 1년 이내에 무상 보증 수리를 한다고 한다. 이 대리점에서 판매한 400개의 제품 중에서 1년 이내에 무상 보증 수리를 하는 제품이 25개 이하일 확률은? (단, $P(0 \le Z \le 2.5) = 0.4938$)

① 0.0062 ② 0.0668 ③ 0.3085
④ 0.6915 ⑤ 0.9938

13

정규분포 $N(20,\ 5^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 확률변수 Y가 $Y = 2X + 50$일 때, 확률 $P(Y \le 100)$은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772

① 0.1915 ② 0.3413 ③ 0.4772
④ 0.6915 ⑤ 0.8413

14

어느 회사에서 생산되는 약의 무게는 표준편차가 0.1 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 약 중 n개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 2 g이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $1.951 \le m \le 2.049$일 때, n의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

15

정규분포 N$(10,\ 4)$인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 다음을 만족하는 n의 최솟값은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.81	0.465
1.96	0.475
2.05	0.480

$$\mathrm{P}(9\le \overline{X}\le 11)\ge 0.95$$

① 15　② 16　③ 17
④ 18　⑤ 19

16 UP!!

한 개의 주사위를 36번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 한다. $\mathrm{E}((X-a)^2)$의 최솟값이 b일 때, $a+b$의 값은?

① 7　② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

17 서술형

숫자 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$이 각각 적힌 n장의 카드에서 한 장을 뽑을 때, 그 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하자. X의 평균과 분산을 구하여라.

18 서술형

1000명이 응시한 어떤 어학 시험의 점수는 평균이 600점, 표준편차가 75점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 750점 이상인 사람은 약 몇 명인가?
(단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$)

(2) 상위 10 %에 들기 위한 최저 점수는 약 몇 점인가? (단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.28)=0.4$)

19 서술형

어느 공장에서 생산하는 음료수의 무게 X의 분포는 평균이 1000 mL, 표준편차가 100 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 음료수 중에서 임의추출한 400개의 표본평균이 1010 mL 이상일 확률을 p_1, 990 mL 이상 1005 mL 이하일 확률을 p_2라고 할 때, p_2-p_1의 값을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$,
$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$)

IV 통계

중단원 평가 문제

▶ 1. 확률분포 / P_194

01 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_3C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

답 풀이 참조

02 $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=1$$

즉, $\int_0^1 ax^3dx=1$이므로

$$\left[\frac{a}{4}x^4\right]_0^1=\frac{a}{4}=1$$

$$\therefore a=4$$

답 ④

03 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+b=1$$

$$\therefore b=\frac{1}{4}$$

확률변수 X의 평균이 -1이므로

$$-a\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=-1$$

$$-\frac{1}{4}a=-1$$

$$\therefore a=4$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$V(X)=(-4)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-(-1)^2=11$$

답 ⑤

04 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$V(X)=96-15=81$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{81}=9$$

답 ②

05

$$E(X)=\int_0^4 x\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^4\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\left[-\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^4=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

$$V(X)=\int_0^4 x^2\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\int_0^4\left(-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)dx-\frac{16}{9}=\left[-\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{6}x^3\right]_0^4-\frac{16}{9}=\left(-8+\frac{32}{3}\right)-\frac{16}{9}=\frac{8}{3}-\frac{16}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

답 $E(X)=\frac{4}{3}$, $V(X)=\frac{8}{9}$, $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

06 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 할 때, 500원짜리 동전 2개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	500원	상금(원)
H	H	1000
H	T	500
T	H	500
T	T	0

확률변수 X가 가지는 값은 0, 500, 1000이므로 그 각각의 확률을 구하여 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	500	1000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{2}+1000\times\frac{1}{4}=500$

$\therefore \mathrm{E}(2X+300)=2\mathrm{E}(X)+300$

$=2\times500+300=1300$

답 ③

07 타율이 2할이므로 이 선수가 한 번의 타석에서 안타를 칠 확률은 0.2이다. 안타를 친 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ 0.2)$를 따른다. 즉,

$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\cdot0.2^x\cdot0.8^{4-x}$

(단, $x=0, 1, 2, 3, 4$)

따라서 세 번 이상 안타를 칠 확률은

$\mathrm{P}(X\geq3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$={}_4\mathrm{C}_3\cdot0.2^3\cdot0.8^1+{}_4\mathrm{C}_4\cdot0.2^4\cdot0.8^0$

$=0.0256+0.0016$

$=0.0272$

답 ①

08 불량률이 5 %이므로 한 개의 제품을 생산할 때 그것이 불량품일 확률은 0.05이다. 확률변수 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.05)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times0.05=5$

$\mathrm{V}(X)=100\times0.05\times0.95=4.75$

$\sigma(X)=\sqrt{4.75}$

답 $\mathrm{E}(X)=5,\ \mathrm{V}(X)=4.75,\ \sigma(X)=\sqrt{4.75}$

09 노란 공이 x개, 파란 공이 4개 들어 있는 주머니에서 1개의 공을 꺼낼 때 노란 공을 꺼낼 확률은 $\frac{x}{x+4}$이다.

이러한 시행을 n번 반복하므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

확률변수 X의 평균이 12, 분산이 3이므로

$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{x}{x+4}=12$ ……㉠

$\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{x}{x+4}\cdot\left(1-\frac{x}{x+4}\right)=3$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12\left(1-\frac{x}{x+4}\right)=3$

$\frac{4}{x+4}=\frac{1}{4}$

$\therefore x=12$

$x=12$를 ㉠에 대입하면

$n\cdot\frac{12}{12+4}=12$

$\therefore n=16$

$\therefore x+n=12+16=28$

답 28

10 $Z=\frac{X-100}{20}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\leq80)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{80-100}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq-1)$

$=\mathrm{P}(Z\geq1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)$

$\mathrm{P}(|Z|\leq1)=0.6826$에서

$\mathrm{P}(-1\leq Z\leq1)=0.6826$

$2\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.6826$

$\therefore \mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.3413$

$\therefore \mathrm{P}(X\leq80)=0.5-0.3413$

$=0.1587$

답 0.1587

11 국어, 영어, 수학 성적을 각각 확률변수 X_1, X_2, X_3이라고 하면 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $N(70,\ 15^2)$, $N(74,\ 16^2)$, $N(76,\ 18^2)$을 따른다.

$Z_1=\frac{X_1-70}{15}$, $Z_2=\frac{X_2-74}{16}$, $Z_3=\frac{X_3-76}{18}$

이라고 하면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

세린이의 국어, 영어, 수학 성적을 각각 표준화하면

$$Z_1=\frac{X_1-70}{15}=\frac{85-70}{15}=1$$

$$Z_2=\frac{X_2-74}{16}=\frac{82-74}{16}=\frac{1}{2}$$

$$Z_3=\frac{X_3-76}{18}=\frac{92-76}{18}=\frac{8}{9}$$

$\therefore Z_2<Z_3<Z_1$

따라서 상대적으로 성적이 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 수학, 영어이다.

답 국어, 수학, 영어

12 응시자의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(700,\ 40^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{X-700}{40}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k점이라고 하면

$P(X\geq k)=\frac{350}{5000}=0.07$이므로

$$P\left(Z\geq\frac{k-700}{40}\right)=0.07$$

$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{k-700}{40}\right)=0.07$$

$$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{k-700}{40}\right)=0.43$$

그런데 주어진 표준정규분포표에서

$P(0\leq Z\leq 1.5)=0.43$이므로

$$\frac{k-700}{40}=1.5 \qquad \therefore k=760$$

따라서 합격자의 최저 점수는 760점이다.

답 760점

▶ 2. 통계적 추정 / P_220

01 ① 선거에서 유권자 확인은 모든 사람을 조사하여야 한다.

답 ①

02 모집단 {1, 3, 5, 7}에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 그 숫자를 각각 X_1, X_2라고 하면 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$는 X_1, X_2의 값에 따라 각각 다음 표와 같다.

X_1 \ X_2	1	3	5	7
1	1	2	3	4
3	2	3	4	5
5	3	4	5	6
7	4	5	6	7

표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	6	7	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

(1) $E(\overline{X})$

$$=1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{3}{16}+\cdots+7\times\frac{1}{16}$$

$$=4$$

(2) $V(\overline{X})$

$$=1^2\times\frac{1}{16}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{3}{16}+\cdots$$

$$+7^2\times\frac{1}{16}-4^2$$

$$=\frac{5}{2}$$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

답 (1) 4 (2) $\frac{5}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

03 모집단이 정규분포 $N(5,\ 2^2)$을 따르고, 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$E(\overline{X})=5,\ \sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{16}}=\frac{1}{2}$

인 정규분포 $N\left(5,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{\overline{X}-5}{\frac{1}{2}}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

표본평균 $\overline{X}$가 4 이상 6 이하인 경우는

$4\le\overline{X}\le6$일 때이므로

$$\begin{aligned}P(4\le\overline{X}\le6)&=P\left(\frac{4-5}{\frac{1}{2}}\le Z\le\frac{6-5}{\frac{1}{2}}\right)\\&=P(-2\le Z\le2)\\&=2P(0\le Z\le2)\\&=2\times0.4772=0.9544\end{aligned}$$

답 0.9544

04 $m=1500,\ \sigma=100$이고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$E(\overline{X})=m=1500,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{100}{\sqrt{n}}$

인 정규분포 $N\left(1500,\ \left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{\overline{X}-1500}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P\left(\overline{X}\ge1400+\frac{200}{\sqrt{n}}\right)\ge0.95$에서

$$P\left(Z\ge\frac{1400+\frac{200}{\sqrt{n}}-1500}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)\ge0.95$$

$P(Z\ge2-\sqrt{n})\ge0.95$

이때,

$$\begin{aligned}P(Z\ge-1.65)&=P(Z\le1.65)\\&=0.5+P(0\le Z\le1.65)\\&=0.5+0.45=0.95\end{aligned}$$

이므로

$2-\sqrt{n}\le-1.65\qquad\therefore\ n\ge13.3225$

따라서 n의 최솟값은 14이다.

답 14

05 $n=100,\ \overline{x}=56.5,\ \sigma(\overline{x})=6.3$

표본의 크기 $n=100$이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있다. 즉,

$\sigma=\sigma(\overline{x})=6.3$

모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$56.5-1.96\frac{6.3}{\sqrt{100}}\le m\le56.5+1.96\frac{6.3}{\sqrt{100}}$

$56.5-1.2348\le m\le56.5+1.2348$

$\therefore\ 55.2652\le m\le57.7348$

답 $55.2652\le m\le57.7348$

06 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때, 신뢰구간의 길이가 모표준편차의 $\frac{1}{5}$ 이내이므로

$\left(\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\le\frac{1}{5}\sigma$

$2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{5}\sigma\qquad\therefore\ n\ge384.16$

따라서 표본의 크기는 385개 이상이어야 한다.

답 385

07 표본에 있는 100명의 학생 중에서 지난 여름 방학 때 봉사활동을 한 학생의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $P(0.76\le\hat{p}\le0.88)$이다.

여기서 모비율 $p=0.8$이고 $n=100$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-0.8}{\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.8}{0.04}$$

은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(0.76\le\hat{p}\le0.88)\\&=P\left(\frac{0.76-0.8}{0.04}\le Z\le\frac{0.88-0.8}{0.04}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

답 0.8185

08 표본비율 $\hat{p}=\frac{10}{400}=0.025$이고, $n=400$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$=0.025-1.96\sqrt{\frac{0.025\times0.975}{400}}$

$\fallingdotseq 0.025-0.015$

$=0.01$

$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$=0.025+1.96\sqrt{\frac{0.025\times0.975}{400}}$

$\fallingdotseq 0.025+0.015$

$=0.04$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$0.01\le p\le 0.04$

즉, 신뢰도 95 %로 추정하였을 때 이 지역 주민의 1 %~4 %가 B형 간염에 감염되었을 것으로 추정된다.

답 풀이 참조

대단원 평가 문제

p.222~225

01 표본조사의 장점은 시간 단축, 경비 절감, 정확성의 제고 및 파괴검사에도 가능하다는 것이다. 그러나 투명성의 확보와는 관계가 없다.

답 ④

02 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=1^2=1$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1+5^2=26$

$\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X^2+X+1)$

$=2\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)+1$

$=2\times26+5+1=58$

답 ③

03 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(360,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=360\times\frac{1}{6}=60$

$\mathrm{V}(X)=360\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=50$

$\sigma(X)=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

답 ③

04 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}$

$=\frac{4}{5}$

답 ②

05 $f(x)=4x^3$은 확률밀도함수이므로

$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot4x^3dx$

$=\int_0^1 4x^4dx$

$=\left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^1=\frac{4}{5}$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3dx-\left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$=\int_0^1 4x^5dx-\frac{16}{25}$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^6\right]_0^1-\frac{16}{25}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{75}$$

답 ①

06 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times 0.1=10$

$\mathrm{V}(X)=100\times 0.1\times 0.9=9$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=9+10^2=109$

답 ④

07 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\alpha$이면 모평균 m의 신뢰도 $\alpha\ \%$인 신뢰구간은

$$\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

신뢰구간의 길이는

$$\left(\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 길어지고, 표본의 크기가 커질수록 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

답 ④

08 $m=500$, $\sigma=20$, $n=25$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=500,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{20}{\sqrt{25}}=4$

인 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 4^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{\overline{X}-500}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

표본평균이 490 g 이상 510 g 이하인 경우는 $490\le\overline{X}\le 510$일 때이므로

$$\mathrm{P}(490\le\overline{X}\le 510)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{490-500}{4}\le\frac{\overline{X}-500}{4}\le\frac{510-500}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=2\times 0.4938=0.9876$$

답 ⑤

09 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 할 때, 500원짜리 동전 2개와 10원짜리 동전 1개를 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	500원	100원	상금(원)
H	H	H	1100
H	H	T	1000
H	T	H	600
T	H	H	600
H	T	T	500
T	H	T	500
T	T	H	100
T	T	T	0

상금의 액수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 500, 600, 1000, 1100이다.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	500	600	1000	1100	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{8}+500\times\frac{1}{4}+\cdots$$
$$+1100\times\frac{1}{8}$$
$$=550$$
$$\mathrm{V}(X)=0^2\times\frac{1}{8}+100^2\times\frac{1}{8}+500^2\times\frac{1}{4}+\cdots$$
$$+1100^2\times\frac{1}{8}-550^2$$
$$=127500$$

답 ④

10 표본비율 $\hat{p}=\frac{320}{400}=0.8$이고, $n=400$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\begin{aligned}\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}&=0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}\\&=0.8-0.0392\\&=0.7608\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}&=0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}\\&=0.8+0.0392\\&=0.8392\end{aligned}$$

이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$0.7608\le p\le0.8392$

답 ③

11 $n=25$, $\bar{x}=32.2$, $\sigma(\bar{x})=0.5$

표본의 크기 $n=25$가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있다. 즉,

$\sigma=\sigma(\bar{x})=0.5$

평균 무게 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$32.2-1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{25}}\le m\le32.2+1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{25}}$

$32.2-0.196\le m\le32.2+0.196$

$\therefore$ $32.004\le m\le32.396$

$\alpha=32.004$, $\beta=32.396$

$$\begin{aligned}\therefore\ \beta-\alpha&=32.396-32.004\\&=0.392\end{aligned}$$

답 ①

12 400개 중 25개의 비율은

$\frac{25}{400}=0.0625$

표본에 있는 400개의 제품 중 1년 이내에 무상보증 수리를 하는 제품의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(\hat{p}\le0.0625)$이다.

여기서 모비율 $p=0.1$이고 $n=400$은 충분히 크므로

$$\begin{aligned}Z&=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\\&=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{0.015}\end{aligned}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(\hat{p}\le0.0625)&=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.1}{0.015}\le\frac{0.0625-0.1}{0.015}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=0.0062\end{aligned}$$

답 ①

13 $\mathrm{E}(X)=20$, $\mathrm{V}(X)=5^2$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(2X+50)\\&=2\mathrm{E}(X)+50\\&=2\times20+50\\&=90\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{V}(2X+50)\\&=2^2\mathrm{V}(X)\\&=2^2\cdot5^2\\&=10^2\end{aligned}$$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{Y-90}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le100)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{100-90}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le1)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 ⑤

14 $\overline{x}=2$, $\sigma=0.1$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$2-1.96\dfrac{0.1}{\sqrt{n}}\le m\le 2+1.96\dfrac{0.1}{\sqrt{n}}$

이때, $1.951\le m\le 2.049$이므로

$2-1.96\dfrac{0.1}{\sqrt{n}}=1.951$

$\dfrac{0.196}{\sqrt{n}}=0.049$

$\sqrt{n}=\dfrac{0.196}{0.049}=4$

$\therefore n=16$

답 ①

15 $m=10$, $\sigma=2$, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$\mathrm{E}(\overline{X})=10$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

인 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\dfrac{2}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(9\le\overline{X}\le 11)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{9-10}{\dfrac{2}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{11-10}{\dfrac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

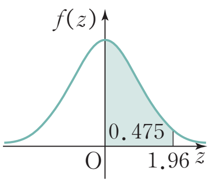
$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.95$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.475$

주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$



$\dfrac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.96$

$\therefore n\ge 15.3664$

따라서 n의 최솟값은 16이다.

답 ②

16 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나오는 확률은 $\dfrac{1}{6}$이다. 그러므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \dfrac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=36\cdot\dfrac{1}{6}=6$

$\mathrm{V}(X)=36\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=5+6^2=41$

$\therefore \mathrm{E}((X-a)^2)=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)$

$=\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2$

$=41-2a\cdot 6+a^2$

$=a^2-12a+41$

$=(a-6)^2+5$

따라서 $\mathrm{E}((X-a)^2)$은 $a=6$일 때 최솟값 $b=5$이므로

$a+b=6+5=11$

답 ⑤

17 1단계 **확률변수 X의 확률분포표를 만든다.**

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$	1

2단계 **평균 $\mathrm{E}(X)$를 구한다.**

$\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{n}+2\times\dfrac{1}{n}+3\times\dfrac{1}{n}+\cdots+n\times\dfrac{1}{n}$

$=\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n+1}{2}$

3단계 분산 $V(X)$를 구한다.

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12}$$
$$=\frac{(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}}{12}$$
$$=\frac{(n+1)(n-1)}{12}$$
$$=\frac{1}{12}(n^2-1)$$

답 $E(X)=\frac{n+1}{2}$, $V(X)=\frac{1}{12}(n^2-1)$

18 **1단계** 확률변수를 표준화한다.

어학 시험의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(600,\ 75^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{X-600}{75}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

2단계 750점 이상인 사람의 수를 구한다.

(1) $P(X\geq750)=P\left(Z\geq\frac{750-600}{75}\right)$
$$=P(Z\geq2)$$
$$=0.5-P(0\leq Z\leq2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

$\therefore\ 1000\times0.0228=22.8$

따라서 750점 이상인 사람은 약 23명이다.

3단계 상위 10 %에 들기 위한 최저 점수를 구한다.

(2) 구하는 최저 점수를 a라고 하면

$$P(X\geq a)=P\left(Z\geq\frac{a-600}{75}\right)$$
$$=0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-600}{75}\right)$$
$$=0.1$$

$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq\frac{a-600}{75}\right)=0.4$

$P(0\leq Z\leq1.28)=0.4$이므로

$$\frac{a-600}{75}=1.28$$

$\therefore\ a=696$

따라서 구하는 최저 점수는 약 696점이다.

답 (1) 약 23명 (2) 약 696점

19 **1단계** 확률변수를 표준화한다.

$m=1000$, $\sigma=100$, $n=400$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$E(\overline{X})=1000,\ \sigma(\overline{X})=\frac{100}{\sqrt{400}}=\frac{100}{20}=5$$

인 정규분포 $N(1000,\ 5^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{\overline{X}-1000}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

2단계 p_1의 값을 구한다.

표본평균이 1010 mL 이상일 확률은

$$P(\overline{X}\geq1010)$$
$$=P\left(Z\geq\frac{1010-1000}{5}\right)$$
$$=P(Z\geq2)$$
$$=0.5-P(0\leq Z\leq2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228=p_1$$

3단계 p_2의 값을 구한다.

표본평균이 990 mL 이상 1005 mL 이하일 확률은

$$P(990\leq\overline{X}\leq1005)$$
$$=P\left(\frac{990-1000}{5}\leq Z\leq\frac{1005-1000}{5}\right)$$
$$=P(-2\leq Z\leq1)$$
$$=P(-2\leq Z\leq0)+P(0\leq Z\leq1)$$
$$=P(0\leq Z\leq2)+P(0\leq Z\leq1)$$
$$=0.4772+0.3413$$
$$=0.8185=p_2$$

4단계 p_2-p_1의 값을 구한다.

$$p_2-p_1=0.8185-0.0228$$
$$=0.7957$$

답 0.7957